RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2017	Épreuve : Mathématiques Section : Sciences Techniques Durée : 3h — Coefficient : 3 Session principale

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Vérifier que : $-7-4i\sqrt{2}=(1-2i\sqrt{2})^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2+z+2+i\sqrt{2}=0$.

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-i\sqrt{2}$, $z_B=-1+i\sqrt{2}$ et $z_C=\overline{z_A}$.

Montrer que C est un point du cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre $[AB]$.

3) A tout point M du plan d'affixe z distinct de chacun des points A et B, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{z+1-i\sqrt{2}}{z+i\sqrt{2}}$.

a) Montrer que si l'affixe z' du point M' est imaginaire pur, alors M appartient au cercle ($\mathscr{C}$) de diamètre $[AB]$.

b) Montrer que si $|z'|=1$, alors M est un point de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

4) Soit E le point d'affixe $z_E=\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}i$ et E' le point d'affixe $z_{E'}=\dfrac{z_E+1-i\sqrt{2}}{z_E+i\sqrt{2}}$.

a) Montrer que $z_{E'}=-i$.

b) Déduire l'affixe de chacun des deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle ($\mathscr{C}$).

Exercice 2 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(0,-1,0)$, $B(1,1,0)$ et $C(0,0,1)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points A, B et C définissent un plan P.

c) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P est : $2x-y+z-1=0$.

2) On considère le plan $Q: x+y-2z+1=0$. Montrer que les plans P et Q sont sécants et que leur intersection est la droite $\Delta: \begin{cases} x=\alpha \\ y=5\alpha-1 \\ z=3\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant : $x^2+y^2+z^2+2x-2z+\frac{4}{3}=0$.

a) Montrer que S est une sphère de centre le point $I(-1,0,1)$. Déterminer son rayon.

b) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des plans P et Q.

4) Soient J et K les points de contact respectifs de la sphère S avec les plans P et Q.

a) Justifier que le plan (IJK) est perpendiculaire à chacun des plans P et Q.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $x+5y+3z-2=0$.

c) Déterminer les coordonnées du point L, intersection des plans P, Q et (IJK).

Exercice 3 : (4 points)

Une entreprise fabrique deux types de circuits électriques. 40% sont de type A et 60% de type B.

Des statistiques ont prouvé que :

2% des circuits de type A présentent un défaut.

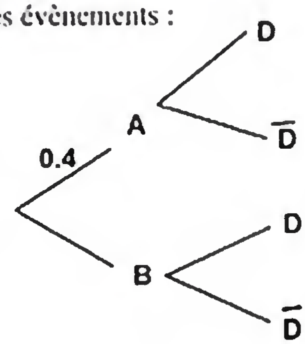
1% des circuits de type B présentent un défaut.

1) On choisit un circuit au hasard et on désigne par A, B et D les évènements :

A : « le circuit est de type A »

B : « le circuit est de type B »

D : « le circuit présente un défaut ».



a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre :

b) Montrer que $p(D)=0{,}014$

c) Un circuit choisi au hasard présente un défaut.

Quelle est la probabilité qu'il soit de type A ? (on arrondira le résultat à 10^{-3} prés).

2) L'usine fabrique chaque semaine 10000 circuits. Tous les circuits sans défaut sont vendus et fournissent chacun un bénéfice net de 0,3DT. Les circuits avec défaut sont détruits mais font perdre chacun 0,5DT à l'entreprise (matière première et coût de fabrication).

Déterminer le bénéfice moyen réalisé chaque semaine.

<u>Exercice 4</u>: (6 points)

1) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x)=-x+1-2\ln x$.

   a) Déterminer le sens de variations de la fonction g.

   b) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$, et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

   a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$.

   b) Dresser le tableau de variations la fonction f.

   c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution β et que $\beta\in]0,56\,;0,57[$.

4) Dans l'annexe, on a construit dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (Γ) de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{x}$ et l'unique point d'inflexion A pour la courbe (C) ainsi que la tangente à (C) en ce point.

   a) Etudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ)

   b) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C).

5) Soit I_λ l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=\lambda$ où λ est un réel strictement supérieur à 1.

   a) Montrer que $I_\lambda=1-\dfrac{1}{\lambda}(1+\ln\lambda)$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to +\infty} I_\lambda$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ......

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve : mathématiques – Section : Sciences Techniques

Feuille à rendre avec la copie