

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 0, 2)$, $B(-2, 1, -1)$ et $C(0, 0, 1)$.

1) a - Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b - Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est

$$x - z + 1 = 0.$$

2) On considère les points $I(1, -1, -1)$ et $J(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ et soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire à P.

a- Montrer que la droite Δ coupe le plan P en J.

b- Calculer la distance IJ.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.

a- Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon R que l'on déterminera.

b- Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle de centre J et de rayon $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, on considère le point $N(1 + \cos\theta, -1 + \sin\theta, -3)$.

a- Vérifier que N est un point de la sphère S.

b- Justifier que le point N n'appartient pas au plan P.

c- Montrer que $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AN} = -5 - \cos\theta$.

d- En déduire la valeur de θ pour laquelle le volume du tétraèdre ABCN est minimal.

Exercice 2 (4 points)

On considère dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation :

$$(E) : z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0.$$

1) a- Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2 = 6 - 6i\sqrt{3}$.

b- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

a- Construire le cercle (C) de centre O et passant par le point A d'affixe 2.

On désigne par B et C les points du plan d'affixes respectives $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = \bar{b}$.

b- Mettre chacun des nombres complexes b et c sous la forme exponentielle.

c- En déduire que les points B et C appartiennent au cercle (C).

d- Construire alors les points B et C.

3) a- Montrer que $\frac{c}{b-2} = \frac{2}{c-b} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b- En déduire que le point O est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+1)e^{1-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b - Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c - Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $(+\infty)$.

2) a - Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = -x e^{1-x}$.

b - Dresser le tableau de variation de f.

3) a - Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b - Soit T la tangente à la courbe (C) au point I.

Montrer que T a pour équation cartésienne $y = -x + 3$.

4) Construire la courbe (C) ainsi que sa tangente T. (on prendra $e \approx 2,7$)

5) Soit α un réel strictement supérieur à (-1) .

On pose $I(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx$.

a - Donner une interprétation graphique de l'intégrale $I(\alpha)$.

b - Vérifier que pour tout réel x , on a : $f(x) = f''(x) + 2e^{1-x}$.

c - En déduire que $I(\alpha) = e^2 - (2 + \alpha)e^{1-\alpha}$.

d - Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

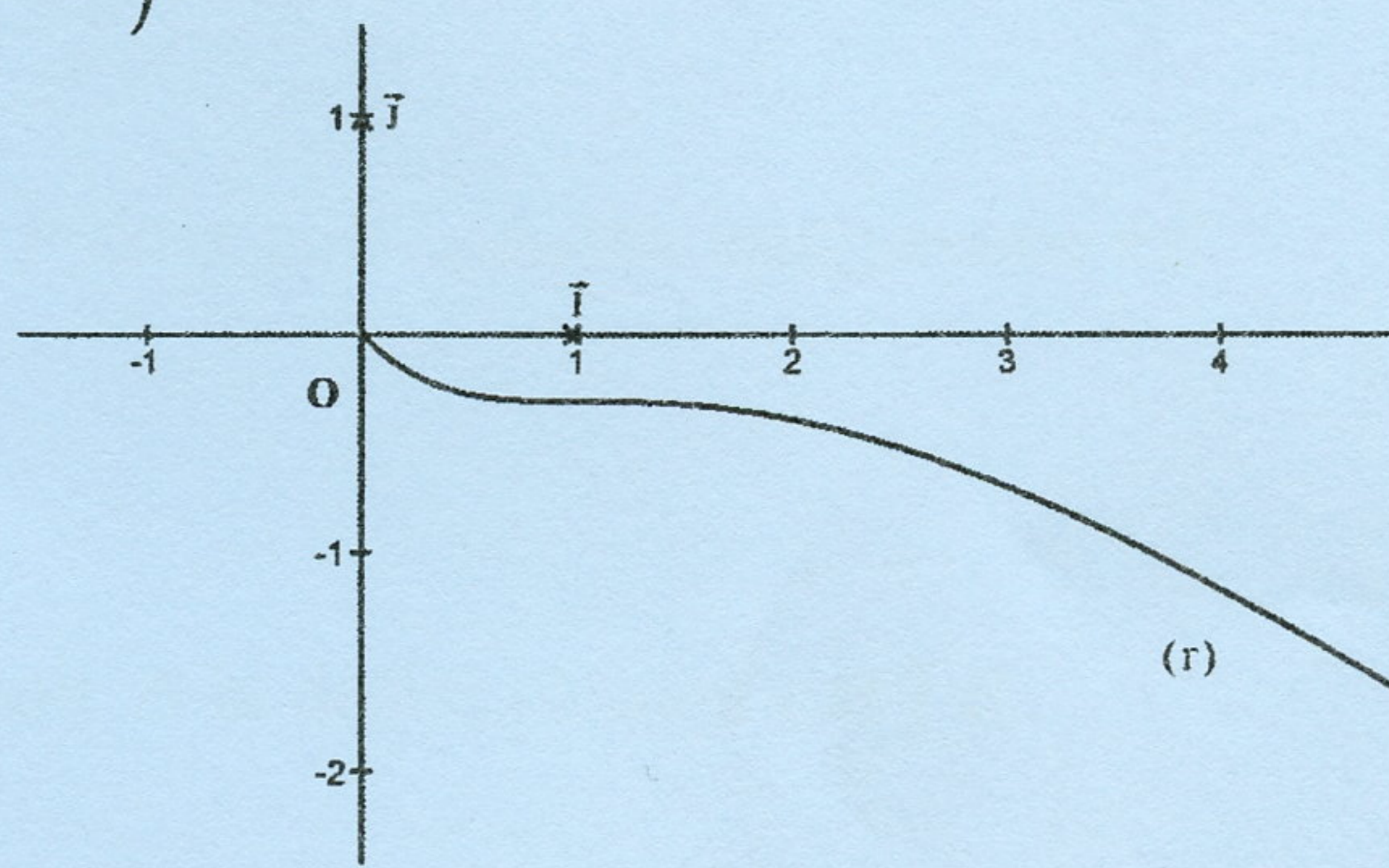
Exercice 4 (5 points)

1) La courbe (Γ) ci-contre, est la représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{I}, \vec{J}) de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$.

(Γ) coupe l'axe des abscisses uniquement en O .

Par une lecture graphique, justifier que :

pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ on a : $\ln(1+x^2) \leq x$.



2) On considère la suite (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1 + U_n^2), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n > 0$.

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$.

c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d- Déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

3) Soit (S_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

a- Montrer que la suite (S_n) est strictement croissante.

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n \leq 3 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c- Déduire que la suite (S_n) est convergente.