

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

I) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1, 0, -1)$, $B(0, 2, -2)$ et le plan $P : x - 2y + z + 6 = 0$.

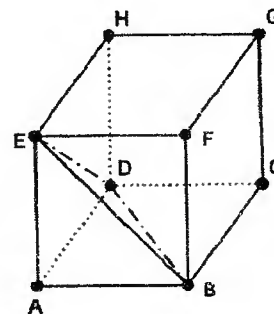
La droite (AB) est :

- a) Strictement parallèle au plan P b) sécante avec le plan P c) incluse dans le plan P.

II) Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

Le volume du tétraèdre EABD est égale à :

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{6}$



III) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne la sphère S de centre O et de rayon 2 et le plan Q d'équation $x + y + z - 3 = 0$.

On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan Q.

1) Les coordonnées du point H sont :

- a) $(1, 1, 1)$ b) $(-1, -1, -1)$ c) $(3, 0, 0)$

2) L'intersection du plan Q avec la sphère (S) est :

- a) Le vide b) Un cercle c) Un point.

Exercice 2 (5 points)

Soit dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 + 2(\sqrt{3} - i)z - 4i\sqrt{3} = 0$.

1) a- Vérifier que : $(2\sqrt{3} + 2i)^2 = 8 + 8i\sqrt{3}$.

b- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B

d'affixes respectives $z_A = -2\sqrt{3}$ et $z_B = \sqrt{3} - 3i$.

a- Montrer que le triangle OAB est isocèle en O.

b- Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, on a placé le point A dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Construire le point B dans le même repère.

3) Soient C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2i$ et $z_D = -\frac{z_B}{2}$.

a- Montrer que $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{3}}{4}i$.

En déduire que la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC)

b- Montrer que les points A, D et C sont alignés.

c- Placer le point C et construire le point D dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

d- Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $6\sqrt{3}$.

Exercice 3 (5 points)

Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2} - u_n} \end{cases} ; \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) a- Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n < \sqrt{2}$.

b- Montrer que la suite u est croissante.

c- En déduire que la suite u est convergente et calculer sa limite.

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2} - u_n}$.

a- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - u_n}$

b- En déduire que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

c- Exprimer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = \frac{\sqrt{2} n}{n+1}$.

3) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \ln(u_n)$ et $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

a- Montrer que $S_n = \frac{1}{2} n \ln 2 - \ln(n+1)$.

b- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = -2x + x \ln(x+1)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a- Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$.

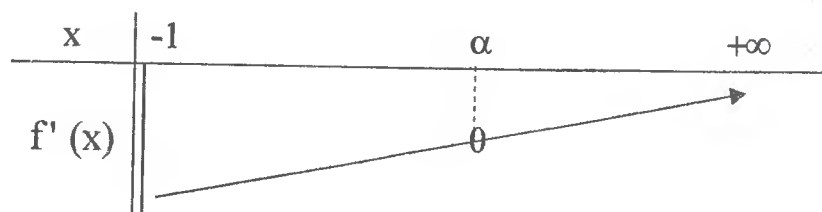
b- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

2) a- Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$; $f'(x) = -\frac{x+2}{x+1} + \ln(x+1)$.

b- Le tableau ci-dessous indique la variation de la fonction dérivée f' de f .

Le réel α vérifie $f'(\alpha) = 0$.



Déterminer alors le signe de $f'(x)$ sur $]-1, +\infty[$.

c- Dresser le tableau de variation de f .

3) Dans la figure 2 de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe

C_g de la fonction g définie sur $]-1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{-x^2}{x+1}$, la droite $\Delta: x = -1$ et on a placé le réel α .

a- Vérifier que $\ln(\alpha + 1) = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$ et en déduire que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

b- Construire le point P d'abscisse α de la courbe C_f .

4) a- Déterminer les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

b- Tracer C_f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5) a- Vérifier que pour tout $x > -1$ on a : $g(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1}$.

b- Calculer $\int_0^\alpha g(x) dx$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^\alpha x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(\alpha + 1) + \frac{1}{2} \int_0^\alpha g(x) dx.$$

d- Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

Montrer que $\mathcal{A} = \frac{3\alpha^3 - \alpha^2 + 4}{4(\alpha + 1)}$.

Épreuve : Mathématiques – Section : sciences Techniques
Annexe à rendre avec la copie

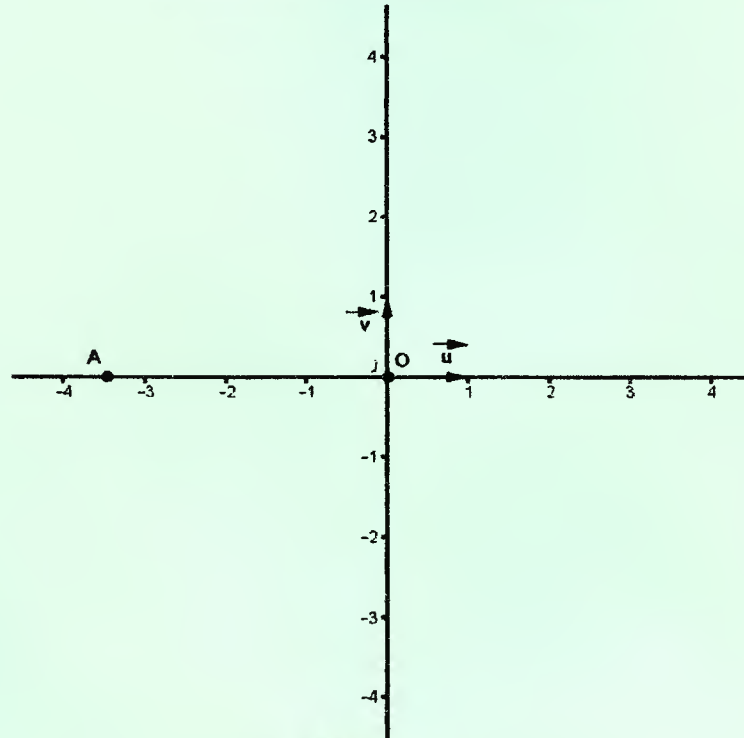


Figure 1

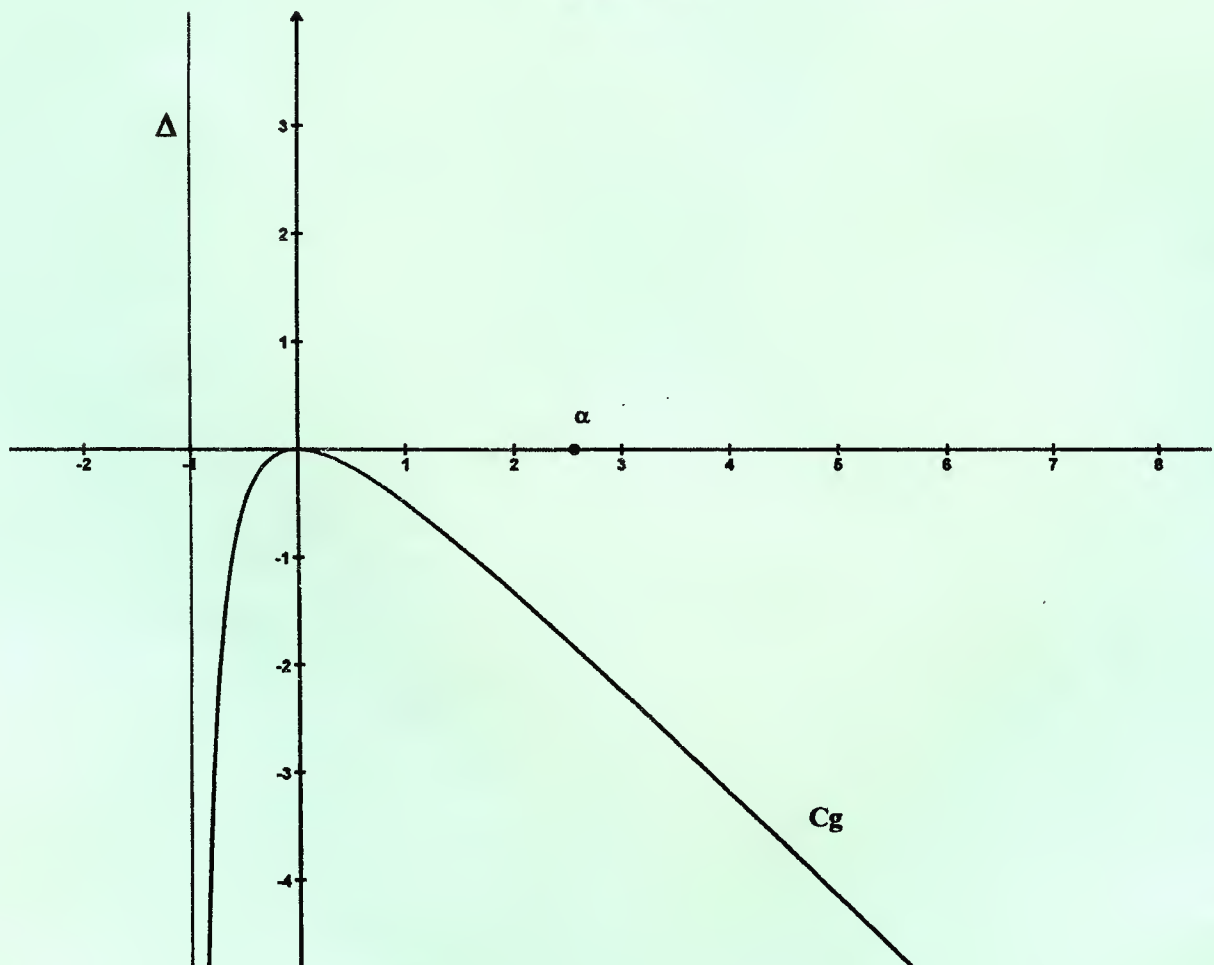


Figure 2