

CORRECTION DE DEVOIR DE BACCALAUREAT (PRINCIPALE 2018)

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

Le sujet comporte 4 exercices de difficultés moyennes et faciles.

Exercice n°1 : (facile)

1) a) $e^{\frac{5\pi i}{12}}(e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{-\frac{\pi i}{4}}) = (e^{\frac{8\pi i}{12}} - e^{\frac{2\pi i}{12}}) = (e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi i}{6}})$

$$\begin{aligned} (e^{\frac{8\pi i}{12}} - e^{\frac{2\pi i}{12}}) &= e^{\frac{5\pi i}{12}} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \\ &= e^{\frac{5\pi i}{12}} \cdot \sqrt{2}i \end{aligned}$$

b) $4e^{\frac{2\pi i}{3}} - 4\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi i}{6}}\right) - 4e^{\frac{\pi i}{6}} = 0$

c) $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} = -4e^{\frac{\pi i}{6}} ; z_2 = -2e^{-\frac{\pi i}{6}}$

d) $\begin{cases} z_1 = 1 + i\sqrt{3} \\ z_2 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$

2) a) $i(1 + i\sqrt{3}) = i + i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$

b) $|z_A - z_O| = |z_B| = |z_B - z_O|$
 Implique que : OAB est isocèle.

$$|z_A - z_O|^2 + |z_B - z_O|^2 = 4 + 4 = 8 \text{ et } |z_A - z_B|^2 = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2} = 8$$

Implique que OAB est rectangle en O (théorie de Pythagore)

c) Voir figure 3

3) a) $|z_C - z_O| = |z_A - z_B| = \sqrt{8} ; OC = AB$

$$\begin{aligned} \text{Arg}\left(\frac{z_C - z_O}{z_A - z_B}\right) &= \text{arg}\left(\frac{(1 - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} + 1)}{(1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)}\right) \\ &= \text{arg}\frac{-2 + i\left(\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)^2\right) + 2}{8} \\ &= \text{arg}i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; (OC) \perp (AB) \end{aligned}$$

OACB est un quadrilatère de diagonales égaux et orthogonales.

Alors OACB est carrée.

b) Voir figure 3

c) $|z_C| = \sqrt{8} ; \text{arg } z_C = \text{arg } z_A + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$z_C = 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}$$

Exercice n°2 : (moyenne)

1) a) $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

Alors A, B et C ne sont pas alignés

b) On a : $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est le normal à P, alors P : $-5x - 5z + d = 0 ; d$ est un réel.

$A(1, 2, -1)$ est un point de P alors $d=0$.

alors $P : x+z=0$

2) a) $A \in \Delta$ (pour $\alpha=0$)

b) $\Delta (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}, A)$ alors $\Delta \perp P$.

3) a) $D(I_\alpha, P) = \frac{|\alpha+1+\alpha-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2|\alpha|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\alpha|$

b) la comparaison entre $D(I_\alpha, P)$ et $2\sqrt{2}$ donne :

- $\alpha \in]-2, 2[: P$ coupe S
- $\alpha = -2$ ou $\alpha = 2 : P$ est tangente à S
- $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

4) a) $D(I_\alpha, B) = \sqrt{(\alpha-1)^2 + (-2)^2 + (\alpha+1)^2} = \sqrt{2\alpha^2 + 6} = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1$$

b) $|1| = |-1| = 1$, alors d'après 4) a) $P \cap S = C_{(k, r)}$

$$r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$$

$k = \Delta \cap P$; car Δ est le normal à P passant par I_α

$$\Rightarrow \alpha + 1 + \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow K = A$$

Conclusion : $P \cap S = C_{(A, \sqrt{6})}$

Exercice n°3 : (facile)

1) a) Voir figure 2.

b) la calculatrice donne $r = 0,99$.

c) Oui, On peut envisager un ajustement affine car $|r| \sim 1$.

2) a) Par la méthode de moindres carrés : $Y = 0,000011x + 4,34$.

b) Par la méthode de moindres carrés : $X = 91011,24y - 391203,85$.

3) a) La consommation pour 400 000 km est égale à :

$$0,11 \cdot 10^{-4} \times 400000 + 4,34 = 8,74 \text{ L/100km.}$$

b) la voiture consomme 8,5 L/100km pour un kilométrage est égale à :

$$91011,24 \times 8,5 - 391203,85 = 382 \ 391,69 \text{ km.}$$

Conclusion : A partir de 382 392 km parcourus, la société doit renouveler la voiture.

Exercice n°4 : (moyenne)

1) a) $h(1) = 0$.

b)

X	0	1	$+\infty$
h	-	0	+

2) a) $\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} 1 + (x-1) \ln x = 1 + (-1) \times -\infty = +\infty$.

Interprétation graphique : l'axe des ordonnées est asymptote verticale au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} 1 + (x-1) \ln x = 1 + (+\infty) \times +\infty = +\infty$.

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{1+(x-1)\ln x}{x} = \lim_{+\infty} \frac{1}{x} + \frac{(x-1)\ln x}{x} = 0 + 1 \times +\infty = +\infty.$$

Interprétation graphique : (C) admet une branche parabolique suivant l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) $f'(x) = \ln x - \frac{(x-1)}{x} = \frac{x \ln x - (x-1)}{x} = \frac{h(x)}{x}$.

b)

x	0	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$+\infty$	1	$+\infty$

4) a) $f(x)=x \Leftrightarrow 1 + (x-1)\ln x = x$
 $\Leftrightarrow (x-1)\ln x = x-1$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \text{ est un solution} \\ \ln x = 1; \text{ si } x \neq 1 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow 1 \text{ et } e \text{ sont deux solutions de } f(x)=x.$

b) $f(x)-x = 1 + (x-1)\ln x - x$
 $= (x-1)(\ln x - 1)$

x	0	1	e	$+\infty$
x-1	-	0	+	+
ln x - 1	-	-	0	+
f(x)-x	+	0	-	+

c)

x	0	1	e	$+\infty$
f(x)-x	+	0	-	+
Position relative	C est au-dessus de Δ	C est au-dessous de Δ	C est au-dessus de Δ	

5) Voir figure 1

6) a) $\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

b) $A = \int_1^e |1 + (x-1)\ln x - x| \, dx$
 $= \int_1^e x - 1 - (x-1)\ln x \, dx$
 $= \left[\frac{x^2}{2} - x + (x \ln x - x) \right]_1^e - \int_1^e x \ln x \, dx$
 $= \frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2} - \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right)$
 $\sim 0,38 \text{ u.a}$

7) a) $U_0 = 2 \in [1, e]$ (l'ordre 0 est vraie)
 Supposons que $U_n \in [1, e]$ (l'ordre n est vraie)
 Montrons que $U_{n+1} \in [1, e]$

On f est continue et strictement croissante, sur $]0, +\infty[\supseteq \mathbb{N}^*$.

Alors $f(U_n) = U_{n+1} \in [f(1), f(e)] = [1, e]$. (l'ordre n+1 est vraie)

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \leq 0$ (d'après 4) b))

Alors (U_n) est décroissante.

c) $\begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante.} \\ U_n \geq 1 \end{cases} \rightarrow (U_n) \text{ est convergente.}$

$\left\{ \begin{array}{l} (U_n) \text{ est convergente vers } l \\ U_{n+1} = f(U_n) \\ f \text{ est continue sur }]0, +\infty[\ (\geq N) \end{array} \right.$
 $\rightarrow l = f(l) \rightarrow l = 1 \text{ ou } l = e \text{ (à rejeter car } U_n \text{ est décroissante et } U_0 = 2 < e)$

Figure 1

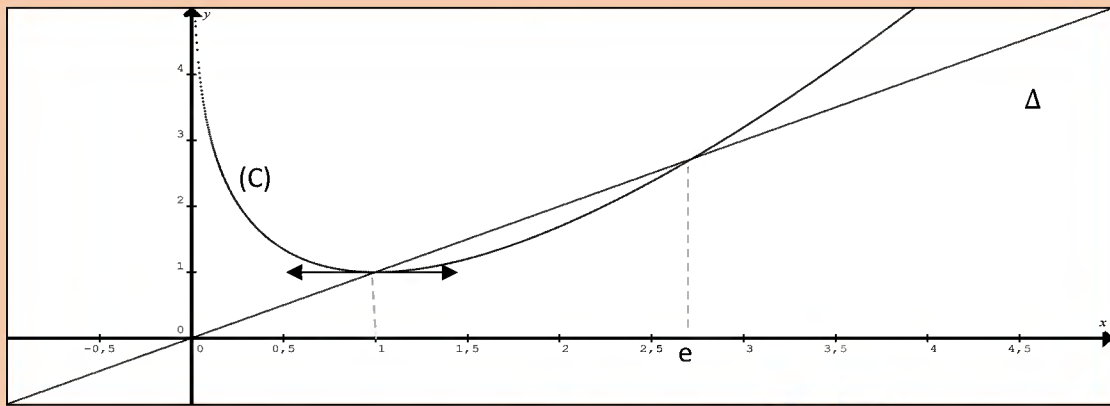


Figure 2

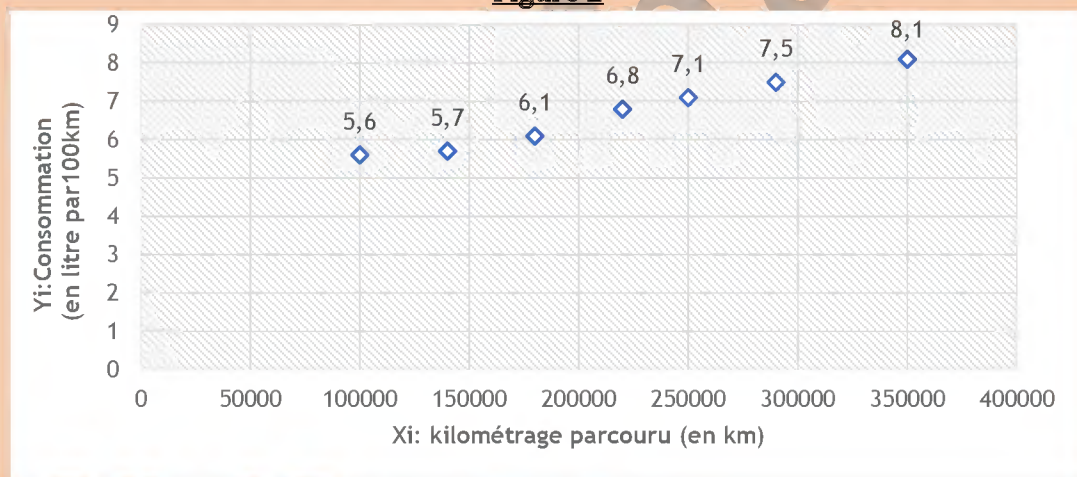


Figure 3

