Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2014

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
a	b	b	c

1) Le point I appartient au plan (EFB), qui est parallèle au plan (HGC), d'où la distance du point I au plan (HGC) est la longueur de l'arête du cube. C'est-à-dire la distance du point I au plan (HGC) est égale à 1.

2) S la sphère de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$.

La distance du point I au plan (EFH) est égale à $\frac{1}{2}$, rayon de la sphère, donc la sphère est tangente au plan (EFH). Par suite l'intersection de cette sphère avec le plan (EFH) est un seul point.

3) Les deux vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont colinéaires et de sens contraires. D'autre part $AH = \sqrt{2}$, diagonale d'un carré de côté 1.

D'où $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH} = -AH^2 = -2$.

4) $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE}$ est un vecteur normal au plan (EFD).

Le côté $[DC]$ du cube est parallèle au côté $[EF]$, donc le vecteur $\overrightarrow{DC}$ n'est pas normal au plan (EFD). D'où $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} \neq \overrightarrow{DC}$.

On peut remarquer que le vecteur $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE}$ est orthogonal à chacun des deux vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FE}$. Graphiquement, on peut voir que le vecteur $\overrightarrow{BF}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{FD}$. On peut confirmer cela par le calcul :

$\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BF}.\left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD}\right) = \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BF}.\overrightarrow{GD} = 0 + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GD} \neq 0$. Donc $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} \neq \overrightarrow{BF}$.

Ainsi $\overrightarrow{FD} \wedge \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AH}$.

Remarque : Pour les questions 3) et 4), on peut considérer un repère de l'espace et vérifier par le calcul.

Exercice 2

1) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(\sqrt{2}+2+i\sqrt{2})\,z+2(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=0.$

a) Vérifions que 2 est une solution de l'équation (E) :

$$2^2-2(\sqrt{2}+2+i\sqrt{2})+2(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=4-2\sqrt{2}-4-2i\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}=0.$$

D'où 2 est une solution de l'équation (E).

b) Soit z_2 l'autre racine de l'équation (E).

- On peut utiliser la somme des racines :

$$2+z_2=\sqrt{2}+2+i\sqrt{2}\Rightarrow z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}.$$

- On peut utiliser le produit des racines :

$$2.z_2=2(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\Rightarrow z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}.$$

2) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A et B les points d'affixes respectives $z_A=2$ et $z_B=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

a) $z_B=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=2e^{i\frac{\pi}{4}}.$

b) Voir la figure.

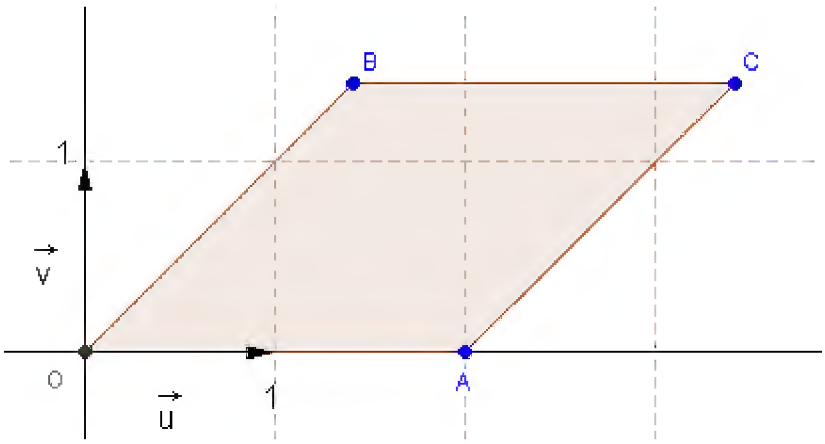
Pour placer le point B, il suffit de remarquer que $|z_B|=2$ et $\arg(z_B)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi].$

Donc B est sur le cercle de centre O et de rayon 2 et tel que $(\vec{u},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi].$

3) Soit C le point d'affixe $z_C=2+z_B$.

a) Voir la figure.

On a $z_C=2+z_B$, d'où le point C est l'image du point B par la translation de vecteur $2\vec{u}$.



b) Montrons que le quadrilatère OACB est un losange :

$OA = |z_A| = 2$; $OB = |z_B| = 2$; $BC = |z_C - z_B| = |2 + z_B - z_B| = |2| = 2$
et $AC = |z_C - z_A| = |2 + z_B - 2| = |z_B| = 2$.

On a $OA = OB = AC = BC$, d'où OACB est un losange.

c) $\left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{8}}.e^{i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}.e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{8}+i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}+i\frac{\pi}{8}} = e^{i\times 0} + e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$.

D'où $1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$.

d) $z_C = 2 + z_B = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 2\left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)e^{i\frac{\pi}{8}} = 2\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}} = 4\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}}$.

e) $z_C = 4\cos\frac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}} = 4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$

D'autre part $z_C = 2 + z_B = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Par identification des deux parties réelles on obtient : $4\cos^2\frac{\pi}{8} = 2 + \sqrt{2}$.

$$4\cos^2\frac{\pi}{8} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}} = \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow 1 + \tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{4}{2+\sqrt{2}} - 1$$
$$= \frac{4-(2+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{6-2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2}.$$

$\tan^2\frac{\pi}{8} = 3 - \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$; d'où $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ car on sait que $\tan\frac{\pi}{8} > 0$.

Exercice 3

I] Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

1) $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

2) En exploitant le tableau de variation de g et en tenant compte du fait que $g(0)=0$, on peut conclure que $g(x)\geq 0$; pour tout $x\in\mathbb{R}$.

II] Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{-x}+x-2$.

(C) la courbe représentative f de dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{-x}+x-2=-\infty$; car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{-x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-2=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+2)e^{-x}+x-2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{2}{x})e^{-x}+1-\dfrac{2}{x}=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, d'où la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(-\infty)$.

c) La droite $\Delta : y=x-2$.

$$f(x)-(x-2)=(x+2)e^{-x}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-2) &= \lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}+2e^{-x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}+2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^{x}}{x}\right)}+2e^{-x}=0 \text{ ; car } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=0$, d'où la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) de f.

d) On se propose d'étudier la position de la courbe (C) et Δ.

$$f(x)-(x-2)=(x+2)e^{-x}.$$

Le signe de $f(x)-(x-2)$ est celui de $x+2$, car $e^{-x}>0$. On a donc :

- Si $x<-2$ on a $x+2<0$ et $f(x)-(x-2)<0$. Dans ce cas la courbe (C) est au-dessous de Δ.
- Si $x=-2$ on a $x+2=0$ et $f(x)-(x-2)=0$. La courbe (C) coupe Δ au point d'abscisse (-2).
- Si $x>-2$ on a $x+2>0$ et $f(x)-(x-2)>0$. Dans ce cas la courbe (C) est au-dessus de Δ.

2)a) $f(x)=(x+2)e^{-x}+x-2$; $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{-x}-(x+2)e^{-x}+1\\ &= e^{-x}-xe^{-x}-2e^{-x}+1\\ &= -xe^{-x}-e^{-x}+1\\ &= e^{-x}(-x-1+e^{x})\\ &= e^{-x}(e^{x}-x-1)=e^{-x}g(x).\end{aligned}$$

On a ainsi : $f'(x)=e^{-x}g(x)$; pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = e^{-x} g(x)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où le signe de f' est celui de g.

Par suite $f'(x) \geq 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)e^{-x} + x - 2 = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3)a) $f'(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$; $x \in \mathbb{R}$.

$f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x} = xe^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

f'' s'annule en changeant de signe en 0, d'où le point O est un point d'inflexion pour la courbe (C).

b) Voir la figure.

4) Soit λ un réel strictement supérieur à (-2).

A(λ) l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = \lambda$.

a) $A(\lambda) = \int_{-2}^{\lambda} (f(x) - (x-2))dx = \int_{-2}^{\lambda} (x+2)e^{-x} dx$.

On pose : $u(x) = x + 2 \Rightarrow u'(x) = 1$

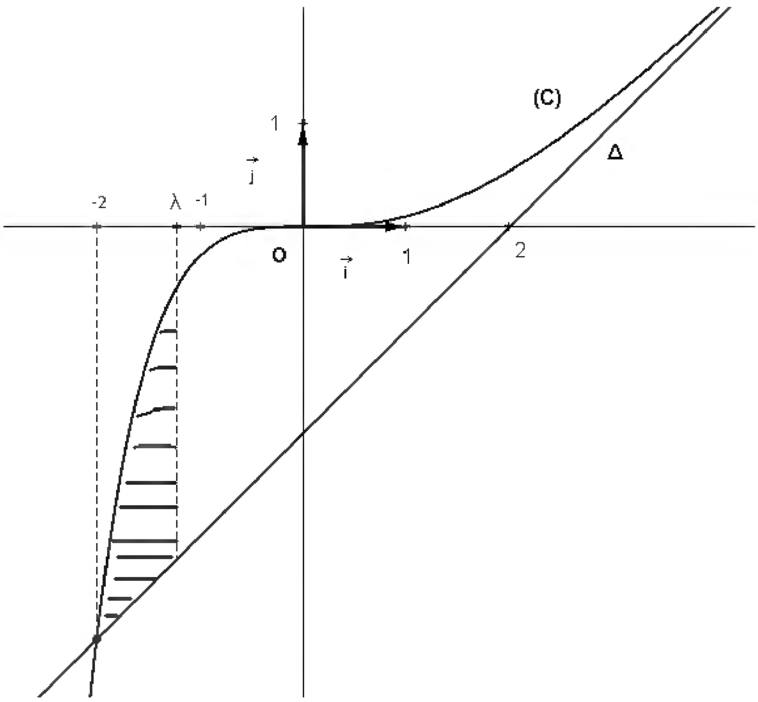
$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$

$$I = \int_{-2}^{\lambda} (x+2)e^{-x} dx = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda} + \int_{-2}^{\lambda} e^{-x}dx$$

$$= -(\lambda+2)e^{-\lambda} + \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda}$$

$$= -(\lambda+2)e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + e^{2} = e^{2} - (\lambda+3)e^{-\lambda} \text{ ua.}$$

b) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{2} - (\lambda+3)e^{-\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{2} - \lambda e^{-\lambda} + 3e^{-\lambda} = e^{2}$.



Exercice 4

Une usine de fabrication de machines effectue deux tests : électrique et mécanique.

- 81% des machines n'ont aucun défaut
- 10% des machines ont un défaut électrique
- Parmi les machines ayant un défaut électrique, 30% ne présentent pas de défaut mécanique.

E : « la machine présente un défaut électrique »

M : « la machine présente un défaut mécanique »

1)a) On a 10% des machines ont un défaut électrique, d'où $p(E)=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}=0,1$.

$\overline{E}$: « la machine ne présente pas un défaut électrique »

$\overline{M}$: « la machine ne présente pas un défaut mécanique »

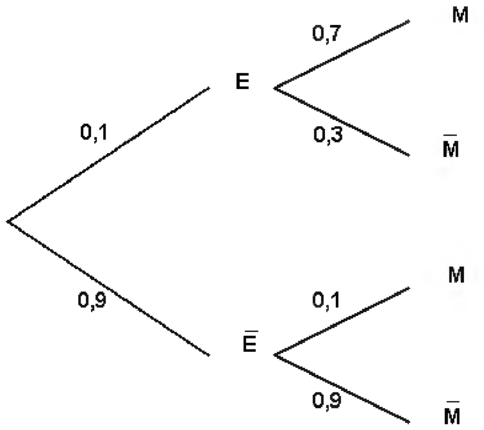
$\overline{E}\cap\overline{M}$: « la machine ne présente pas un défaut électrique et ne présente pas un défaut mécanique». C'est-à-dire la machine ne présente aucun défaut.

81% des machines n'ont aucun défaut, d'où $p(\overline{E}\cap\overline{M})=\dfrac{81}{100}=0,81$.

b) $p(E)=0,1 \Rightarrow p(\overline{E})=1-p(E)=1-0,1=0,9$.

$$p(\overline{M}/\overline{E})=\frac{p(\overline{E}\cap\overline{M})}{p(\overline{E})}=\frac{0,81}{0,9}=0,9.$$

2)a) L'arbre pondéré associé à la situation :



b) $p(M) = p(E).p(M/E) + p(\bar{E}).p(\overline{M}/\bar{E}) = 0,1 \times 0,7 + 0,9 \times 0,1 = 0,16.$

c) Soit p la probabilité qu'une machine présente au moins un des deux défauts.

$p = p(E \cup M) = p(E) + p(M) - p(E \cap M).$

D'après l'énoncé, parmi les machines ayant un défaut électrique, 30% ne présentent pas de défaut mécanique. Autrement dit, parmi les machines ayant un défaut électrique 70% ont aussi un défaut mécanique. D'où $p(E \cap M) = \dfrac{70}{100} = 0,7.$

Par suite $p = p(E \cup M) = p(E) + p(M) - p(E \cap M) = 0,1 + 0,16 - 0,7 = 0,19.$

3) On effectue le contrôle de 20 machines.

X la variable aléatoire donnant le nombre de machines qui présentent au moins un des deux défauts.

a) Le contrôle d'une machine est une épreuve à deux issues contraires : la machine présente au moins un des deux défauts ou la machine ne présente aucun des deux défauts. Le fait de contrôler 20 machines, cela correspond à la répétition de cette épreuve 20 fois. La variable X joue le rôle d'un compteur des machines ayant au moins l'un des défauts parmi ces 20 machines. D'où X suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,19 (la probabilité qu'une machine présente au moins un des deux défauts).

$p(X = k) = C_{20}^{k}(0,19)^{k}(1 - 0,19)^{20-k} = C_{20}^{k}(0,19)^{k}(0,81)^{20-k} \quad ; \quad k \in \{0,1,...,20\}.$

b) La probabilité que deux exactement des 20 machines présentent au moins un des deux défauts :

$p(X = 2) = C_{20}^{2}(0,19)^{2}(0,81)^{18} = 190 \times (0,19)^{2} \times (0,81)^{18} \simeq 0,15.$