RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'ÉDUCATION ✱✱✱✱✱ EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : **Sciences expérimentales**	
	Durée : **3 h**	Coefficient : **3**
SESSION **2016**	**Session de contrôle**	

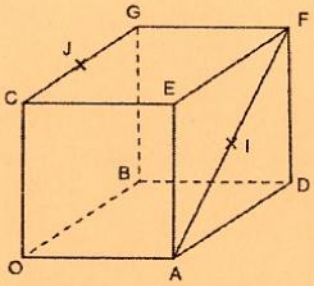
Le sujet comporte quatre pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

Soit OADBCEFG le cube tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [CG].



1) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

b) Vérifier que $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OJ} = \dfrac{1}{4}\left(\vec{u} - 4\,\vec{v} + 2\,\vec{w}\right)$.

2) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

b) Calculer le volume du tétraèdre OIJE.

c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

Sans calculer les cordonnées de H, justifier que $EH = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + \dfrac{11}{7} = 0$.

Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ).

Exercice 2 (5 points)

Dans la <u>figure 1</u> de l'annexe jointe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, (C) est le cercle de centre O et de rayon 1 et A est le point de (C) d'abscisse $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et d'ordonnée positive.

On note a l'affixe du point A.

1) Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$.

a) Donner, en fonction de θ, l'écriture exponentielle des nombres complexes a, $\overline{a}$, a^2 et $\overline{a}^2$.

b) Construire sur l'annexe les points B, C et D d'affixes respectives $\overline{a}$, a^2 et $\overline{a}^2$.

2) a) Justifier que $a + \overline{a} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) Montrer que a et $\overline{a}$ sont les solutions de l'équation (E) : $z^2 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z + 1 = 0$.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z,

$$z^5-1=(z-1)\left[z^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)z+1\right]\left[z^2+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)z+1\right].$$

b) En déduire que a est une racine cinquième de l'unité.

4) a) Donner sous forme exponentielle les racines cinquièmes de l'unité distinctes de 1.

b) Vérifier que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est l'unique racine cinquième de l'unité dont la partie réelle et la partie imaginaire sont strictement positives.

c) En déduire que $a=e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

5) Soit I le point d'affixe 1.
Montrer que les points I, A, C, D et B sont les sommets d'un pentagone régulier.

Exercice 3 (4,5 points)

Le laboratoire d'un lycée est équipé de 10 microscopes dont 3 sont défectueux.

1) Le laborantin, ne distinguant pas à l'avance les microscopes défectueux des autres, tente de choisir un microscope fonctionnel ; il réalise l'épreuve suivante :
Il choisit un microscope (tous les microscopes ont la même probabilité d'être choisis) et teste sa fonctionnalité.
- Si ce microscope est non défectueux, le laborantin arrête le choix.
- Si le microscope choisi est défectueux, il le met à part et choisit un autre du lot restant jusqu'à ce qu'il obtienne un microscope non défectueux.

Soit A_n l'évènement : « Le premier microscope non défectueux est obtenu au $n^{ième}$ choix » et p_n sa probabilité.

a) Justifier que $n \leq 4$.

b) Calculer p_1 et p_2.

c) Montrer que $p_3=\frac{7}{120}$ et que $p_4=\frac{1}{120}$.

2) Soit X la variable aléatoire qui à toute épreuve associe le rang du premier microscope non défectueux choisi.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3) On suppose dans cette question que la durée de vie d'un microscope (c'est-à-dire la durée de fonctionnement (en année) avant la première panne) est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

a) Soit T un réel positif, on note $p(Y \leq T)$ la probabilité qu'un microscope ait une durée de vie inférieure ou égale à T années. Exprimer $p(Y \leq T)$ en fonction de λ et T.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de λ si l'on sait que $p(Y \geq 5) = 0{,}7$.

c) On prend $\lambda = 0{,}071$.
Sachant qu'un microscope n'a pas eu de panne au cours des cinq premières années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

Exercice 4 (6,5 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2e^x$.

a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) Comparer x et $\frac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants : $x\in]0,1[$ et $x\in]1,+\infty[$.

c) En déduire que si $x\in]0,1[$ alors $g(x)<g(\frac{1}{x})$ et que si $x\in]1,+\infty[$ alors $g(x)>g(\frac{1}{x})$.

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x^2-2x+2)e^x+e^{\frac{1}{x}}$ et on désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)-g(\frac{1}{x})$.

b) Calculer $f'(1)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Dans la <u>figure 2</u> de l'annexe jointe on a représenté, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C}_h)$ de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

a) Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de $(\mathscr{C}_h)$.

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

5) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\int_1^x (f(t)-h(t))dt=(x^2-4x+6)e^x-3e$.

b) Soit $\alpha\in]0,1]$.

Exprimer en fonction de α, l'aire $\mathscr{A}_\alpha$ de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_h)$ et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$. Calculer $\lim\limits_{\alpha\to0^+} \mathscr{A}_\alpha$.

Annexe (à rendre avec la copie)

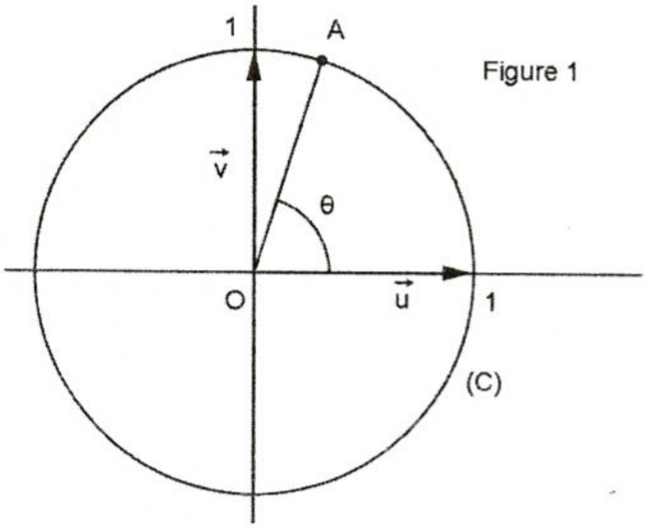


Figure 1

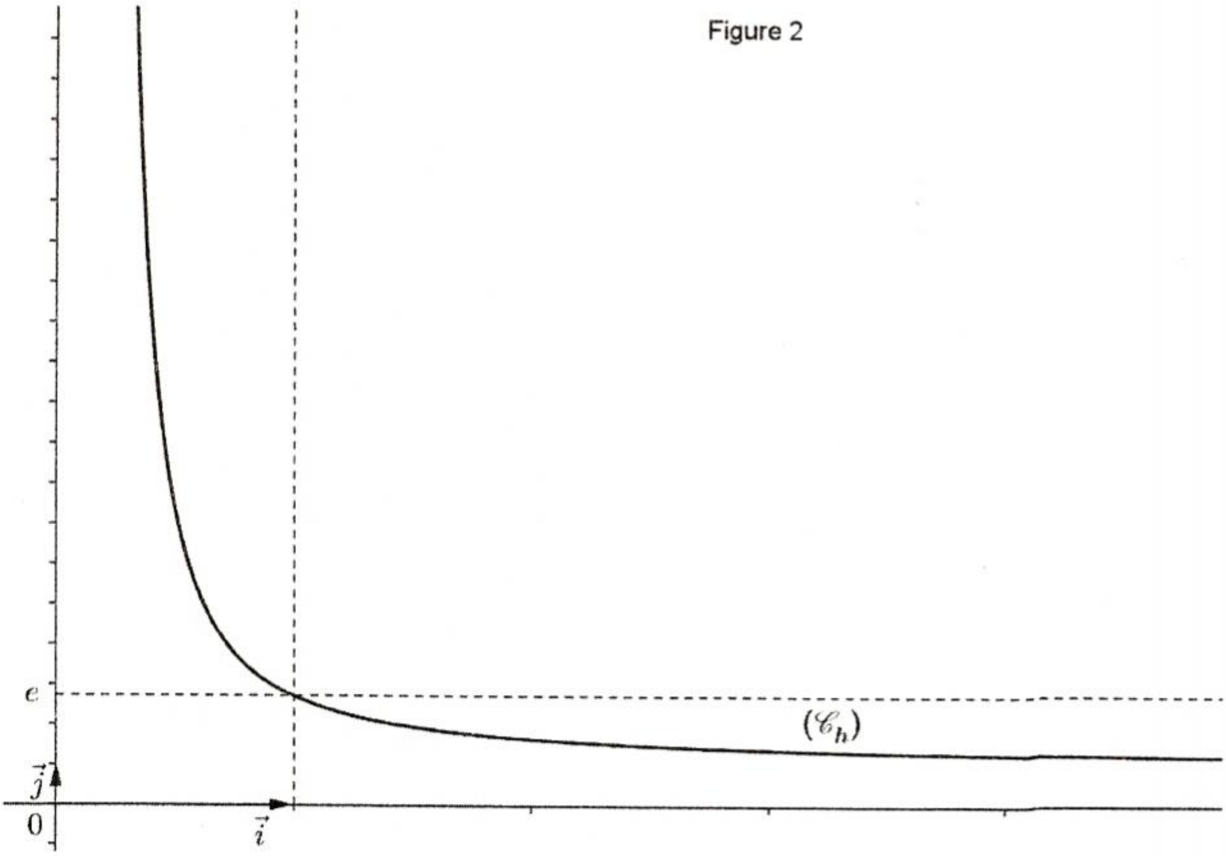


Figure 2