

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◆◆◆ EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2015	Épreuve : MATHEMATIQUES
	Durée : 3 H
	Coefficient : 3
Section : Sciences expérimentales	Session de contrôle

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 23 = 0$.

- 1/ Justifier que (S) est de centre le point $I(1, -1, 0)$ et de rayon 5.
- 2/ Soit le point $J(-1, 1, 1)$ et soit (P) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\vec{JI} \cdot \vec{JM} = 0$.
 - a) Justifier que (P) est le plan d'équation $2x - 2y - z + 5 = 0$.
 - b) Montrer que l'intersection de (S) et (P) est le cercle (C) de centre J et de rayon 4.
- 3/ Soit le point $A(-5, 5, 3)$ et (S') la sphère de centre A et de rayon $2\sqrt{13}$.
 - a) Montrer que A appartient à la droite (IJ).
 - b) Montrer que $AJ = 6$.
- 4/ Soit M un point du cercle (C).
 - a) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.
 - b) En déduire que $AM = 2\sqrt{13}$.
 - c) Déterminer alors l'intersection de la sphère (S') et du plan (P).

Exercice 2 : (5 points)

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 4e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{2i\frac{\pi}{3}} = 0$.

- 1/ a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$.
- b) Résoudre l'équation (E). On donnera les solutions sous forme exponentielle.

2/ Dans l'annexe ci-jointe, (O, \vec{u}, \vec{v}) est un repère orthonormé direct du plan et \mathcal{C} est le cercle de centre le point I d'affixe $z_I = 1 + i\sqrt{3}$ et de rayon $\sqrt{3}$.

a) Écrire z_I sous forme exponentielle.

b) La droite (OI) coupe le cercle \mathcal{C} en deux points A et B tels que $OA < OB$.

Placer A et B, puis justifier que $OA = 2 - \sqrt{3}$ et $OB = 2 + \sqrt{3}$.

c) En déduire que les affixes respectives z_A et z_B des points A et B sont les solutions de l'équation (E).

Exercice 3 : (6 points)

1/ Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.

a) Étudier le sens de variation de g .

b) En déduire que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $g(x) > 0$.

2/ Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x - (\ln x)^2$.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

3/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On désigne par C_f la courbe représentative de f et par Δ la droite d'équation $y = 2x$.

a) Vérifier que Δ est la tangente à C_f en son point d'abscisse 1.

b) Montrer que C_f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite Δ .

c) Étudier la position relative de C_f et Δ .

4/ a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) Tracer la courbe C_f .

c) Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la droite Δ , la courbe C_f et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathcal{A} = e - 2$.

Exercice 4 : (4 points)

1/ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

a) Calculer u_1 .

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

c) Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Montrer que $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$.

2/ En étudiant les variations de la fonction $h : x \mapsto e^x - 1 - x$, montrer que

$$1 + x \leq e^x, \text{ pour tout réel } x.$$

3/ Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par

$$v_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \times \dots \times (1 + u_n).$$

a) Calculer v_0 et v_1 .

b) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_n \leq e^{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right)}$.

d) Montrer que la suite (v_n) est convergente.

e) Soit ℓ la limite de (v_n) .

Montrer que $1 < \ell \leq \sqrt{e}$.

Section : N° d'inscription : Série :
Nom et prénom :
Date et lieu de naissance :

Signatures des
surveillants
.....
.....



Epreuve : MATHEMATIQUES - Section : Sciences expérimentales

Annexe (à rendre avec la copie)

