Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Sciences expérimentales

Session principale 2016

Exercice 1

1) Les plans P et Q ont le même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $-5\neq 7$ alors ils sont strictement parallèles.

2) a) $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5.$ Il en résulte que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}.$

b) $d(I,P)=\sqrt{3}<R$, on en déduit que S et P sont sécants suivant le cercle $\mathscr{C}$ de rayon $\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{2}$ et puisque $J\in P$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I sur P par suite J est le centre de $\mathscr{C}$.

c) $d(I,Q)=3\sqrt{3}>R$, on en déduit que $S\cap Q=\varnothing$.

3) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

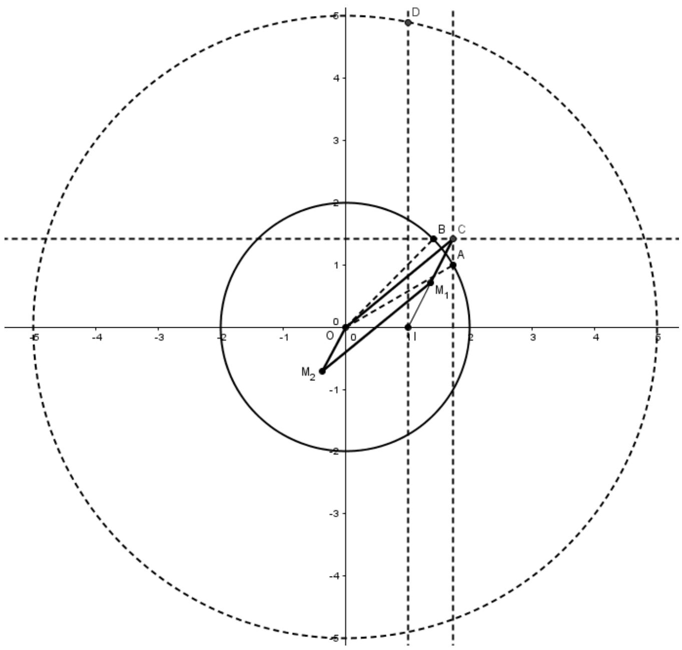
b) Soit $M(x,y,z)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}=2x+2y-2z+2=2(x+y-z+1).$

4) $\begin{cases}M\in S\\ V_{(ABCM)}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M\in S\\ \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M\in S\\ \frac{1}{6}\left|2(x+y-z+1)\right|=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}M\in S\\ x+y-z-5=0 \text{ ou } x+y-z+7=0\end{cases}\Leftrightarrow M\in(S\cap P)\cup(S\cap Q)\Leftrightarrow M\in S\cap P=\mathscr{C}.$

Exercice 2



1) a) Voir figure.

b) $a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}.$

2) a) $\begin{cases}\mathrm{Re}(c)=\mathrm{Re}(a)\\ \mathrm{Im}(c)=\mathrm{Im}(b)\end{cases}$,

on en déduit que $c=\sqrt{3}+i\sqrt{2}.$

b) $c^2=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^2=3-2+2\sqrt{6}i=1+2i\sqrt{6}.$

3) a) $OD=\left|c^2\right|=\sqrt{1+24}=5.$

b) D'une part $OD=5$ donc D appartient au cercle de centre D et de rayon 5, d'autre part

$\mathrm{Re}\left(c^2\right)=1$ donc D appartient à la droite
d'équation $x=1$ d'où la construction de D.
(En tenant compte de $\mathrm{Im}\left(c^2\right)>0$)

4) $\Delta = 4+8i\sqrt{6} = 4c^2$. Soit $\delta = 2c$.

$z_1=\dfrac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2}$.

5) a) $z_1=\dfrac{1+c}{2}$, il en résulte que M_1 est le milieu de [IC].

b) $c=z_1-z_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{M_2M_1}$. On en déduit que OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Voir figure.

Exercice 3

A.

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\left(2x\ln x-x^2+1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{2\ln x}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}=-1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x+\dfrac{1}{x}=+\infty$, il en résulte que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta: y = x$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)=-\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)^2=-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2.$$

b) Pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $f'(x)\ge 0$ de plus $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$-$	
$f(x)$	||	$+\infty$	$\searrow$		$-\infty$

c) $f(1)=0$.

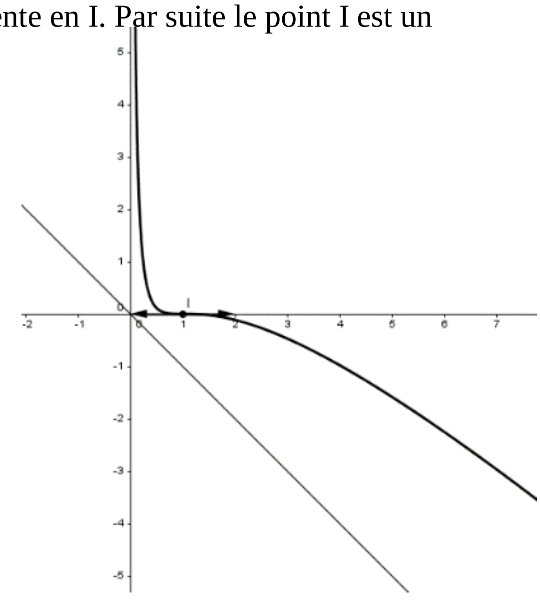
x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	||	$+$	0	$-$	

d) $f'(1)=0$ donc $\mathscr{C}$ admet au point $I(1,0)$ une tangente horizontale de plus la fonction f est strictement croissante sur $\left]0,+\infty\right[$, il en résulte que $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en I. Par suite le point I est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

3) a) Voir figure.

b) $A=\int_1^e |f(x)|dx=-\int_1^e f(x)dx=-\left[2(x\ln x-x)-\dfrac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^e$

$=\dfrac{e^2-7}{2}$ (ua).



4) a) $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=2\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

$$=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

b) Puisque pour tout $x>0,\sqrt{1+\frac{1}{x}}>1$ et f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, il en résulte que $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\le 0$ ou encore $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\le 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B.

1) $u_3=\sum_{k=1}^{3}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln^2 2+\ln^2\left(\frac{3}{2}\right)+\ln^2\left(\frac{4}{3}\right)=0,726.$

2) a) $u_{n+1}-u_n=\ln^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$ car $(1+\frac{1}{n+1}>1)$ par suite la suite (u_n) est croissante.

b) $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$..

c) On a $\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\le\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ alors $\sum_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

Il en résulte que $u_n\le 1-\frac{1}{n+1}$

d) On a $u_n\le 1-\frac{1}{n+1}<1$. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 alors la suite (u_n) est convergente vers un réel L.

Pour $n\ge 3,\ u_3\le u_n\le 1-\frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty}1-\frac{1}{n+1}=1$ alors $0.7<0.726\le L\le 1$..

<u>**Exercice 4**</u>

1) a) $r=-0.97$.
b) D : y = -2.64x + 34.66.
c) Pour x = 10, on obtient y = -2,64.10 +34,66 = 8.26.

2) a) $Z=\ln y=-0.11x+3.57 \Leftrightarrow y=e^{-0.11x+3.57} \Leftrightarrow y=e^{3.57}e^{-0.11x} \Leftrightarrow y=35.52e^{-0.11x}$.
b) Pour x=10, on obtient y = $35.52.e^{-1.1}\approx 11,82$.

3) L'allure du nuage est proche de l'allure de (C) et n'a pas l'allure d'une droite alors le deuxième ajustement est plus adapté.