

Le sujet comporte trois pages, la page 3/3 est à rendre avec la copie

**Exercice 1 (4 points)**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- Soit  $(U_n)$  la suite définie pour tout entier naturel non nul par :  $U_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ,

1) La limite de la suite  $(U_n)$  est égale à :

- a) 0    b) 1    c)  $e$

2) La suite  $(U_n)$  est :

- a) croissante                                      b) décroissante                                      c) non monotone

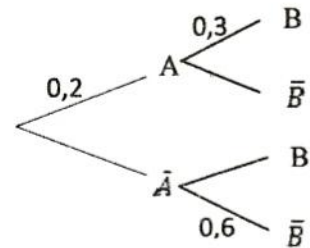
- On considère l'arbre de probabilité suivant :

3)  $P(\overline{A} \cap \overline{B})$  est égale à :

- a) 0,14    b) 0,48    c) 0,6

4)  $P(B)$  est égale à :

- a) 0,32    b) 0,38    c) 0,5



**Exercice 2 (5 points)**

1) On considère la matrice  $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- a) Calculer, en fonction de  $\alpha$  le déterminant de  $M_\alpha$ .  
 b) Pour quelles valeurs de  $\alpha$ ;  $M_\alpha$  est inversible ?

2) On donne les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

- a) En utilisant la première question, justifier que  $A$  est inversible.  
 b) Calculer  $A \times B$ .  
 c) En déduire  $A^{-1}$  et  $B^{-1}$ .

3) On considère le système (S) : 
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ -2x + 4y + z = 3 \\ 4x + y - 2z = -6 \end{cases}$$

- a) Ecrire le système (S) sous forme matricielle.  
 b) Résoudre, alors (S).

### Exercice 3 (6 points)

A) On donne dans l'annexe joint, la courbe (C) dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , par :  $f(x) = e^x - 1$ .

- 1) Montrer que la droite  $\Delta : y = x$  est la tangente à (C) au point O (0,0).
- 2) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle I que l'on précisera.
- 3) Tracer  $\Delta$  et la courbe (C') de la fonction réciproque  $f^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 4) Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour tout réel  $x$  de I.

B) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , par :  $g(x) = e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}$  et  $(\Gamma)$  sa courbe représentative.

1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ .

2) a) Etudier le signe de  $(f(x) - g(x))$  pour  $x$  réel, en déduire la position relative de (C) et  $(\Gamma)$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$ .

3) a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = \frac{e^{2x}(e^x + 2)}{(e^x + 1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

c) Calculer  $g(0)$  puis tracer  $(\Gamma)$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

4) a) Vérifier que pour tout réel  $x$ ;  $g(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$ .

b) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe  $(\Gamma)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ . Calculer  $\mathcal{A}$ .

### Exercice 4 (5 points)

1) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $11x - 7y = 4$ .

a) Vérifier que (1,1) est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit G l'ensemble des entiers relatifs  $n$  vérifiant :  $n \equiv 2 [11]$  et  $n \equiv 6 [7]$

a) Vérifier que 90 est un élément de G.

b) Soit  $n$  un élément de G, et  $(p, q)$  le couple d'entiers relatifs vérifiant

$$\begin{cases} n = 11p + 2 \\ n = 7q + 6 \end{cases}$$

Montrer que le couple  $(p, q)$  est une solution de (E).

c) En déduire que si  $n$  appartient à l'ensemble G alors  $n \equiv 13 [77]$ .

3) Montrer que si  $n \equiv 13 [77]$  alors  $n$  est un élément de G.

4) Déterminer le plus petit élément de G supérieur à 2000.



Épreuve : MATHÉMATIQUES - Section Sciences de l'informatique ( session de contrôle 2016 )

Annexe (à rendre avec la copie)

