Année scolaire : 2026 – 2027

CORRECTION DU DEVOIR DE CONTRÔLE N°2

Épreuve : Mathématiques | Classe : 3ème Sciences Informatiques | Barème : 20 points

Exercice N°1 : Lecture graphique (5 points)

5 pts

1) a) $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty}$ (branche parabolique de direction (O, $\vec{j}$)) ; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)] = 0}$ (asymptote oblique Δ).

b) & c) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x)-1}{x-1} = \boxed{+\infty}$ (demi-tangente verticale dirigée vers le haut en A) et $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-1}{x-1} = \dfrac{3-1}{0-1} = \boxed{-2}$ (demi-tangente T passant par A(1,1) et (0,3)). Donc f **n'est pas dérivable en 1**.

d) & 2) & 3) $\boxed{f(0) = 2 ; f(-\sqrt{2}) = 0 ; f'(0) = 0}$. La fonction f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ (de $-\infty$ à 2), décroissante sur $[0 ; 1]$ (de 2 à 1), puis croissante sur $[1 ; +\infty[$ (de 1 à $+\infty$). Comme $F' = f$, $f(x) < 0$ sur $]-\infty ; -\sqrt{2}[$ et $f(x) > 0$ sur $]-\sqrt{2} ; +\infty[$: $\boxed{F \text{ est décroissante sur }]-\infty ; -\sqrt{2}] \text{ et croissante sur } [-\sqrt{2} ; +\infty[}$.

Exercice n°2 : Étude d'une fonction définie par morceaux (6 points)

6 pts

1) a) & b) $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$ (car $-1 \notin]1 ; +\infty[$). $f(1) = 2(1)^2 - 1 + 1 = 2$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3x+1}{x+1} = 2$: f est **continue en 1**.

2) a) & b) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{2x^2-x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} (2x+1) = 3 = f'_g(1)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{2} = f'_d(1)$. Comme $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, f n'est pas dérivable en 1. Demi-tangentes en (1, 2) : $\boxed{T_g : y = 3x - 1 \ (x \le 1)}$ et $\boxed{T_d : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} \ (x \ge 1)}$.

3) & 4) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ (asymptote horizontale $y = 3$ en $+\infty$). • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ (branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$).

• $f'(x) = 4x - 1$ sur $]-\infty ; 1[$ (s'annule en $\dfrac{1}{4}$ avec $f(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{7}{8}$) et $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$ sur $]1 ; +\infty[$: f est décroissante sur $]-\infty ; \dfrac{1}{4}]$ (de $+\infty$ à $\dfrac{7}{8}$), puis croissante sur $[\dfrac{1}{4} ; +\infty[$ (de $\dfrac{7}{8}$ à 3).

Exercice n°3 : Systèmes linéaires (4 points)

4 pts

1) $D = 2(1) - 3(-3) = 11 \neq 0$; $D_x = -13(1) - (-3)(-3) = -22$; $D_y = 2(-3) - 3(-13) = 33$. D'où $x = -2$ et $y = 3$: $\boxed{S = \{(-2 ; 3)\}}$.

2) a) & b) Matrice $M = ([2 \ \ 3 \ \ -1] ; [1 \ \ -2 \ \ 2] ; [3 \ \ 1 \ \ 2])$ et matrice complète $M_c = ([2 \ \ 3 \ \ -1 \mid 14] ; [1 \ \ -2 \ \ 2 \mid -6] ; [3 \ \ 1 \ \ 2 \mid 7])$. Par pivot de Gauss (en permutant L_1 et L_2) : $7y - 5z = 26$ et $7y - 4z = 25$, d'où $z = -1$, $y = 3$ et $x = 2$: $\boxed{S' = \{(2 ; 3 ; -1)\}}$.

Exercice n°4 : Arithmétique et récurrence (5 points)

5 pts

1) & 2) • $5x = 3(y + 10)$ avec $5 \wedge 3 = 1$: d'après le théorème de Gauss, $\boxed{S = \{(3k ; 5k - 10), k \in \mathbb{N}, k \ge 2\}}$.

• $a = 15a'$, $b = 15b'$ $(a' \wedge b' = 1)$ et $a' + b' = 8$: $\boxed{S = \{(15, 105) ; (45, 75) ; (75, 45) ; (105, 15)\}}$.

3) a), b) & c) • Pour $n = 0$, $2^0 - 1 = 0$ divisible par 7. Si $2^{3n} - 1 = 7k$, alors $2^{3(n+1)} - 1 = 8(2^{3n} - 1) + 7 = 7(8k + 1)$ (divisible par 7).

• $2^{3n+4} - 16 = 16(2^{3n} - 1)$ est donc divisible par 7. • Comme $2016 = 3 \times 672$, $2^{2016} - 1$ est divisible par 7, donc le reste de 2^{2016} par 7 est $\boxed{1}$.

apcpedagogie.com