Année scolaire : 2026 – 2027

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques — Classe : 3ème Sciences Informatiques — Barème : 20 points

Exercice N°1 : QCM (3 points)

3 pts

1) **a un seul couple solution** ($D = 2(-3) - 5(-\frac{4}{5}) = -6 + 4 = -2 \neq 0$).

2) **$\Delta : x = 0$** (la fonction f est paire sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$).

3) **$AI = \sqrt{2}$** et **La distance de A à D est égale à $\sqrt{2}$** ($d(A, D) = \frac{|-1+2-3|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et $AI = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$).

4) **0** ($\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$).

Exercice N°2 : Étude d'une fonction irrationnelle (7 points)

7 pts

1) f est définie sur $\{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^* / 1 + x \geq 0\}$ et g sur $\{x \in \mathbb{R} / 1 + x \geq 0$ et $\sqrt{1+x} + 1 \neq 0\}$, donc **$D_f = D_g = [-1 ; +\infty[$**.

2) Pour $x = 0$: $g(0) = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2} = f(0)$. Pour tout $x \in [-1 ; +\infty[\setminus \{0\}$, en multipliant par la quantité conjuguée :

$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = g(x)$. Ainsi **$f = g$**.

3) a) & b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} =$ **0**. Comme $f = g$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet la droite d'équation **$y = 0$** comme **asymptote horizontale** au voisinage de $+\infty$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2} = f(0)$: la fonction f est donc **continue en 0**.

Exercice N°3 : Déterminants, Pivot de Gauss et Substitution (10 points)

10 pts

I. 1) Déterminant principal : $D = 3(-6) - 1(9) = -18 - 9 = -27 \neq 0$. Déterminants associés : $D_x = (-3)(-6) - (-4)(9) = 18 + 36 = 54$ et $D_y = 3(-4) - 1(-3) = -12 + 3 = -9$. D'où $x = \frac{54}{-27} = -2$ et $y = \frac{-9}{-27} = \frac{1}{3}$: **$S_{\mathbb{R}^2} = \{(-2 ; \frac{1}{3})\}$**.

I. 2) Soient x le nombre de billets à 7 DT et y celui des billets à 13 DT : $x + y = 32$ et $7x + 13y = 272$. Par substitution ($y = 32 - x$) : $7x + 13(32 - x) = 272 \Leftrightarrow -6x = -144 \Leftrightarrow x = 24$ et $y = 8$. L'association a acheté **24 billets à 7 DT et 8 billets à 13 DT**.

II. 1) • Pour (S_1), les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donnent $5y - 3z = -2$ et $5y - 3z = -2$ (lignes identiques). En posant $z = 5t$ ($t \in \mathbb{R}$) ou en exprimant en fonction de z : $y = \frac{3z-2}{5}$ et $x = 1 + y - 2z = \frac{3-7z}{5}$: **$S_1 = \{(\frac{3-7z}{5} ; \frac{3z-2}{5} ; z), z \in \mathbb{R}\}$**.

• Pour (S_2), par pivot de Gauss ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$) : $3y - 5z = 12$ et $6y - 5z = 9$. En soustrayant : $3y = -3 \Leftrightarrow y = -1$, puis $-5z = 15 \Leftrightarrow z = -3$, et $2x = -3 + y - 2z = 2 \Leftrightarrow x = 1$: **$S_2 = \{(1 ; -1 ; -3)\}$**.

II. 2) Par substitution dans (S_2) : de la 1ère équation, $y = 2x + 2z + 3$. En remplaçant dans la 2ème et la 3ème : $6x + z = 3$ et $12x + 7z = -9$. Avec $z = 3 - 6x$: $12x + 7(3 - 6x) = -9 \Leftrightarrow -30x = -30 \Leftrightarrow x = 1$, d'où $z = -3$ et $y = -1$. On retrouve **$S_2 = \{(1 ; -1 ; -3)\}$**.