Date : 13 Février 2026 **Année scolaire : 2025 – 2026**

CORRECTION DU DEVOIR DE CONTRÔLE N°2

Épreuve : Mathématiques **Classe : 3ème Mathématiques** **Durée : 2 heures**

Exercice N°1 : (4 points)

2,5 pts

1) C_f présente un point anguleux avec demi-tangente verticale en $x = -1$ et une asymptote verticale en $x = 2$: f est dérivable sur $\boxed{]-\infty, -1[,]-1, 2[\text{ et }]2, +\infty[}$.

2) a- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-3)] = 0^+$ (car C_f est au-dessus de Δ), d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x) - x + 3} = \boxed{+\infty}$. De plus, C_f admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$ avec $f(x) \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \boxed{-\infty}$.

b- • Tangente horizontale en $D(2+\sqrt{2}, -1+2\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{f'(2+\sqrt{2}) = 0}$;

• Demi-tangente à droite en $B(-1, 2)$ passant par $(0, 5) \Rightarrow f_d'(-1) = \dfrac{5-2}{0-(-1)} = \boxed{3}$;

• Demi-tangente verticale dirigée vers le bas à gauche en $B(-1, 2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{f(x)-2}{x+1} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{2-f(x)}{x+1} = \boxed{-\infty}$;

• Tangente horizontale en $C(0, 3) \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-3}{x} = f'(0) = \boxed{0}$.

1,5 pt

3) & 4) Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-3	-1	0	2	$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+ \quad \|\| \quad +$	0	$+ \quad \|\| \quad -$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	-2	$\nearrow 2 \nearrow$	3	$\nearrow +\infty \; \|\| \; +\infty \searrow$	$-1+2\sqrt{2}$	$\nearrow +\infty$

Extremums locaux : f admet un $\boxed{\textbf{minimum relatif égal à } -2}$ atteint en $x = -3$ et un $\boxed{\textbf{minimum relatif égal à } -1+2\sqrt{2}}$ atteint en $x = 2+\sqrt{2}$ (point d'inflexion horizontal en $x = 0$).

Exercice N°2 : (6 points)

6 pts

A) 1) & 2) $g(\sqrt{2}) = g(-\sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2-1} = \boxed{0}$. Graphiquement, C_g admet des demi-tangentes verticales en -1 et 1, donc g est dérivable sur $\boxed{]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$. Signe : $g(x) \geq 0$ sur $[-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$ (nulle en $\pm\sqrt{2}$) et $g(x) < 0$ sur $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

B) 1) a- $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} [\dfrac{2\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x-1}} - 1] = \boxed{+\infty}$: demi-tangente verticale dirigée vers le haut en $(1, 0)$. De même $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \boxed{+\infty}$: demi-tangente verticale dirigée vers le bas en $(-1, 2)$.

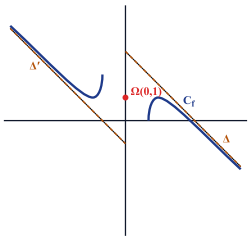
b- & c- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} = -2$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+3)] = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (-x-1)] = 0$: Δ et Δ' sont asymptotes obliques.

2) a-, b- & c- $f'(x) = 2 \dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}}{x^2} - 1 = \dfrac{2 - x^2\sqrt{x^2-1}}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. De plus, : est .

apcpedagogie.com

$f(-x)+f(x)=2\Omega(0,1)$ **centre de symétrie de C_f**

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1 $\quad$ 1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ $\|\|$ $\|\|$ $+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ 2 $\|\|$ 0 $\nearrow$	1	$\searrow$ $-\infty$



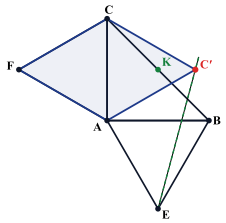
Exercice N°3 : (5 points)

5 pts

1) a-, b- & c- ACF et AEB étant équilatéraux directs, $R(F)=C$ et $R(B)=E$; par conservation des distances, $BF=CE$. $C'=R(C)$ vérifie $AC'=AC$ et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'})\equiv-\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ (triangle ACC' équilatéral indirect). Ainsi $AF=FC=CC'=C'A$: $AFCC'$ est un **losange**.

2) a- & b- $R(A)=A$ et $R(C')=r_{(A,-\frac{2\pi}{3})}(C)=F$ (car $(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AF})\equiv(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF})\equiv\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$: attention au sens direct : $(\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{AF})\equiv\frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$, donc $R((AC'))$ a pour image la droite (AF) car $R(A)=A$ et l'angle entre (AC') et (AF) est $-\frac{\pi}{3}$ $[\pi]$). De plus $R((BC))=(EC')$. Comme $K=(AC')\cap(BC)$, $R(K)=(AF)\cap(EC')=J$: $AK=AJ$ et $(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AJ})\equiv-\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$, donc AKJ est **équilatéral**.

3), 4) & 5) $BE=AB=AC=FC$ et $\overrightarrow{BE}\neq\overrightarrow{FC}$: il existe une unique rotation R' telle que $R'(B)=F$ et $R'(E)=C$. Comme $AB=AF$ et $AE=AC$, le centre est A et l'angle est $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF})\equiv(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF})\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\equiv\boxed{\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]}$. Alors $R\circ R'$ est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, qui envoie B en C et E en C', d'où $(BE)\perp(CC')$. Comme $M\in[BE]$, $N\in[CC']$ et $BM=CN$, $(R\circ R')(M)=N$, donc $AM=AN$ et $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})\equiv\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$: le triangle AMN est rectangle en A, ainsi le cercle de diamètre $[MN]$ passe par le **point fixe A**.



apcpedagogie.com

Exercice N°4 : (5 points)

5 pts

1) a- & b- $a = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i =$ $\boxed{2(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))}$; $b = -\sqrt{3} + i =$ $\boxed{2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))}$. Alors $|u| = |\overline{a}| \cdot |b|^2 = 2 \times 4 = 8$ et $\arg(u) \equiv -\arg(a) + 2\arg(b) \equiv \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{12}$ $[2\pi]$, d'où $\boxed{u = 8(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12}))}$.

2) a- & b- $u = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(2 - 2\sqrt{3}i) = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2})i$. Par identification : $\boxed{\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$ et $\boxed{\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$.

3) $\arg(u^{2028}) \equiv 2028 \times \frac{5\pi}{12} = 169 \times 5\pi = 845\pi \equiv \pi$ $[2\pi]$, donc $u^{2028} = -8^{2028} \in \mathbb{R}_-$.

4) $z' = \frac{z - (-\sqrt{2} - \sqrt{2}i)}{i(z - (-\sqrt{3} + i))} = \frac{z - a}{i(z - b)}$. Or $M \in$ méd$[AB] \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow |z - a| = |z - b|$, d'où $|z'| = \frac{|z - a|}{|i| \cdot |z - b|} = 1 \Leftrightarrow OM' = 1$. De plus, $z' = -i \Leftrightarrow a = b$ (impossible), donc M' décrit le $\boxed{\text{cercle de centre } O \text{ et de rayon 1 privé du point } K(0, -1)}$.

apcpedagogie.com