Année scolaire : 2026 – 2027

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques | Classe : 3ème Sciences Techniques | Barème : 20 points

Exercice 1 : Nombres complexes (5 points)

5 pts

1. a), b) & c) $|z_A| = \sqrt{2+2} = \boxed{2}$ et $\arg(z_A) \equiv \boxed{\frac{\pi}{4}}\ [2\pi]$; $|z_B| = \sqrt{3+1} = \boxed{2}$ et $\arg(z_B) \equiv \boxed{\frac{5\pi}{6}}\ [2\pi]$.

Comme $OA = OB = 2$, A et B appartiennent au **cercle** $\mathscr{C}_{(O,\,2)}$.

2. $\frac{z_B}{z_A} = \frac{(-\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{4} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{6}i+\sqrt{2}i+\sqrt{2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}}$.

3. a), b) & c) $z_A = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = [2\,;\,\frac{\pi}{4}]$ et $z_B = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = [2\,;\,\frac{5\pi}{6}]$.

Donc $\frac{z_B}{z_A} = [\frac{2}{2}\,;\,\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}] = [1\,;\,\frac{7\pi}{12}] = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$. Par identification :

$\boxed{\cos(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$ et $\boxed{\sin(\frac{7\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.

Exercice 2 : Dénombrement (3 points)

3 pts

Tirages successifs sans remise de 3 jetons parmi 11 (3 N, 6 R, 2 V) :

1. Nombre de tirages possibles : $A_{11}^{\,3} = 11 \times 10 \times 9 = \boxed{990}$.

2. Trois jetons rouges : $A_6^{\,3} = 6 \times 5 \times 4 = \boxed{120}$.

3. Trois jetons de la même couleur (3 noirs ou 3 rouges) : $A_3^{\,3} + A_6^{\,3} = 6 + 120 = \boxed{126}$.

4. Tirage tricolore (1 noir, 1 rouge, 1 vert dans un ordre quelconque) : $3! \times A_3^{\,1} \times A_6^{\,1} \times A_2^{\,1} = 6 \times 3 \times 6 \times 2 = \boxed{216}$.

5. Au moins un jeton rouge (complémentaire d'aucun rouge parmi les 5 non-rouges) : $A_{11}^{\,3} - A_5^{\,3} = 990 - 60 = \boxed{930}$.

Exercice 3 : Problèmes de dénombrement (6 points)

6 pts

1. Nombre de permutations de 4 chiffres : $4! = \boxed{24}$ nombres : 9638, 9683, 9368, 9386, 9863, 9836, 6938, 6983, 6398, 6389, 6893, 6839, 3968, 3986, 3698, 3689, 3896, 3869, 8963, 8936, 8693, 8639, 8396, 8369.

2. Tiercés ordonnés parmi 20 coureurs : $A_{20}^{\,3} = 20 \times 19 \times 18 = \boxed{6840}$.

3. a) & b) 3 lettres distinctes : $A_{26}^{\,3} = 26 \times 25 \times 24 = \boxed{15600}$; 3 lettres quelconques : $26^3 = \boxed{17576}$.

4. & 5. • 10 questions VRAI/FAUX : $2^{10} = \boxed{1024}$. • 3 pièces et 2 dés : $2^3 \times 6^2 = 8 \times 36 = \boxed{288}$.

6. & 7. • 1 voyelle (6) puis 1 consonne (20) : $6 \times 20 = \boxed{120}$. • Entiers de 3 chiffres (1^{er} chiffre $\in \{1,\ldots,9\}$) : $9 \times 10 \times 10 = \boxed{900}$.

apcpedagogie.com

Exercice 4 : Triangle dans le plan complexe (3 points)

3 pts

1. $OB = |z_B| = \sqrt{4+12} = 4$ et $OC = |z_C| = \sqrt{4+12} = 4$, donc $B, C \in \mathscr{C}_{(O,\,4)}$.

2. a) & b) $z_A = \dfrac{(2+2i\sqrt{3})-(2-2i\sqrt{3})}{2} = \boxed{2i\sqrt{3}}$. On calcule : $AB = |z_A - z_B| = |-2| = \boxed{2}$; $AC = |z_A - z_C| = |-2+4i\sqrt{3}| = \sqrt{4+48} = \boxed{\sqrt{52}}$; $BC = |z_B - z_C| = |4i\sqrt{3}| = \boxed{4\sqrt{3}}$. Comme $AB^2 + BC^2 = 4 + 48 = 52 = AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ***ABC* est rectangle en *B***.

Exercice 5 : Suite récurrente (3 points)

3 pts

1. $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, $U_2 = \sqrt{2}$, $U_3 = \sqrt{3}$: $\dfrac{U_2}{U_1} = \sqrt{2} \neq \dfrac{U_3}{U_2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, donc (U_n) n'est pas géométrique.

2. a), b) & c) • Par récurrence : $U_1 = 1 \neq 0$; si $U_n \neq 0$, alors $1 + U_n^{\,2} > 1$ donc $U_{n+1} > 1 \neq 0$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n > 0$, donc $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{\dfrac{1+U_n^{\,2}}{U_n^{\,2}}} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{U_n^{\,2}}} > 1$: la suite (U_n) est **strictement croissante** sur $\mathbb{N}$ (puisque $U_1 > U_0$ également).

apcpedagogie.com