Date : 03 / 03 / 2026 — Année scolaire : 2025 / 2026

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques — Niveau : 3ème Année — Section : Mathématiques — Durée : 3 heures

Exercice N°1 : (6 points)

2,5 pts

1) a- $(z-\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)^2=z^2-2\sqrt{2}z+2-\frac{1}{2}(2+2i\sqrt{3})=z^2-2\sqrt{2}z+1-i\sqrt{3}$.

b- (E) $\Leftrightarrow z-\sqrt{2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$, d'où $\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{\frac{\sqrt{2}}{2}(2+\sqrt{3}+i)\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}(2-\sqrt{3}-i)\}}$.

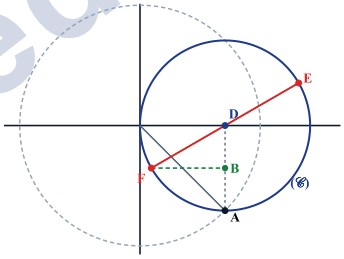
2) a-, b-, c- & d- $|z_A|=2$ et $\arg(z_A)\equiv-\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$, d'où $\boxed{z_A=2(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))}$. Le milieu de $[EF]$ a pour affixe $\frac{z_E+z_F}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(4)=\sqrt{2}=z_D$. Comme $\mathrm{Re}(z_A)=\mathrm{Re}(z_D)=\sqrt{2}$ et $D\in(O,\vec{i})$, D est le projeté orthogonal de A sur (O,i).

3,5 pts

3) a- & b- $\vec{OE}\cdot\vec{OF}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+1\times(-1)]=\frac{1}{2}(4-3-1)=0$: $(OE)\perp(OF)$, donc OEF est rectangle en O et le cercle circonscrit $(\mathscr{C})$ a pour centre le milieu D de l'hypoténuse $[EF]$ et pour rayon $OD=\sqrt{2}$.

4) a- & b- $z_B=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(2-i)$, d'où $z_{\vec{BF}}=z_F-z_B=-\frac{\sqrt{6}}{2}\in\mathbb{R}^*$: $(BF)\,//\,(O,\vec{i})$. Ainsi F est le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de la parallèle à $(O,\vec{i})$ passant par B d'abscisse $x_F<\sqrt{2}$, et $E=S_D(F)$.

5) a- & b- $M\in(\mathscr{C})\Rightarrow DM=\sqrt{2}$, et par théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre, $(\vec{i},\vec{DM})\equiv 2(\vec{i},\vec{OM})\equiv 2\theta$ $[2\pi]$, d'où $\mathrm{aff}(\vec{DM})=\sqrt{2}(\cos(2\theta)+i\sin(2\theta))$. On en déduit : $z_M=\sqrt{2}(1+\cos(2\theta)+i\sin(2\theta))=\sqrt{2}(2\cos^2\theta+2i\cos\theta\sin\theta)=\boxed{2\sqrt{2}\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)}$ (car $\cos\theta>0$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$).



Exercice N°2 : (4 points)

4 pts

1) a- & b- $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(-\sqrt{1-x^2})=0\Rightarrow f_g'(1)=0$. En $(-1)^+$: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$: (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point $(-1,0)$.

c- & d- Pour $x\in\,]-1,1[$, $f'(x)=-\sqrt{1-x^2}-\frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$. . est maximale pour ; alors , d'où et : est . ; .

apcpedagogie.com

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	‖ +	0	− 0
$f(x)$	0 ↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘ 0

2) a- & b- $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} MN \times AH = MH \times AH = \sqrt{1-x^2}(1-x) = f(x)$. $\mathcal{A}(x)x = -\frac{1}{2} y_{M,N} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} MN = \sqrt{3}$ $AM = AN = \sqrt{(1+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{3} AMN$ **équilatéral**

3) a- & b- $(C_{-f}) = S_{(O,\vec{i})}(C_f) M(x,y) \in (E) \Leftrightarrow y = \pm f(x) \Leftrightarrow$ **$y^2 = (1-x)^2(1-x^2)$**

Exercice N°3 : (4 points)

4 pts

1) Répartition : 2 rouges ($2f$), 3 blancs ($3m$), 4 jaunes ($2m$, $2f$) — Total : 5 mâles et 4 femelles.

• $\text{card}(A) = C_3^3 + C_4^3 = 1 + 4 =$ **5** ; • $\text{card}(B) = C_5^2 \times C_4^1 + C_5^3 = 40 + 10 =$ **50** ; • $\text{card}(C) = C_3^3 + C_2^2 \times C_7^1 = 1 + 7 =$ **8**.

2) Tirages successifs sans remise : • $\text{card}(D) = 3! \times (A_2^1 \times A_3^1 \times A_4^1) = 6 \times 24 =$ **144** ; • $\text{card}(E) = 3 \times (A_4^2 \times A_5^1) + A_4^3 = 180 + 24 =$ **204**.

3) Restent 6 souris : 2 mâles (n° 1) et 4 femelles (n° 2).

a- Asymptotes $x = -1$ et $y = 2 \Leftrightarrow b(-1) + 1 = 0$ et $\frac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow (a,b) = (2,1) : 4^1 \times 2^1 =$ **8** choix.

b- $\arg(a+ib) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \Leftrightarrow a = b > 0 \Leftrightarrow (a,b) \in \{(1,1),(2,2)\} : 2^2 + 4^2 =$ **20** choix.

Exercice N°4 : (6 points)

6 pts

(I) 1) a- & b- $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ −	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

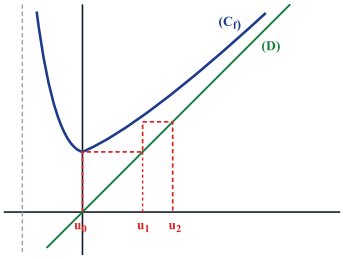
2) a- & b- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$: $(D) : y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$ et (C_f) est au-dessus de (D) sur $]-1, +\infty[$.

(II) 1) & 2) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2}$: (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$. Par récurrence $u_n \geq 0$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n + 1} > 0$.

3) a- & b- ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 = \frac{2u_n}{u_n+1} + \frac{1}{(u_n+1)^2} = 1 + \frac{{u_n}^2}{(u_n+1)^2} \geq 1$. Par récurrence ${u_n}^2 \geq n \Rightarrow u_n \geq \sqrt{n}$, d'où **$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$**.

4) a-, b- & c- $S_0 = 1 = u_1$ et $S_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{1+u_{n+1}} = f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. Comme $u_k \geq \sqrt{k}$, on a et : les deux sommes tendent vers .

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\sqrt{k}} \geq S_n = u_{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\sqrt{k}} \geq u_{n+1} - 1 \boxed{+\infty}$$



apcpedagogie.com