Date : 03 Mars 2026 | Année scolaire : 2025 – 2026

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques | Classe : 3ème Mathématiques | Durée : 3 heures

Exercice 1 : (5 points)

2 pts

A) 1) Nombre total de tirages simultanés de 3 jetons parmi 15 : $C_{15}^{3} =$ **455**.

2) Trois couleurs distinctes (1 R, 1 V, 1 B) : $C_6^1 \times C_5^1 \times C_4^1 = 6 \times 5 \times 4 =$ **120**.

3) Les points rouges sont sur la demi-droite $]0, +\infty)$ de $(O, \vec{i})$, les verts sur la demi-droite $]0, +\infty)$ de $(O, \vec{j})$ et les bleus sur la demi-droite d'angle $\frac{3\pi}{4}$: trois points sont alignés si et seulement si les trois jetons sont de même couleur, soit $C_6^3 + C_5^3 + C_4^3 = 20 + 10 + 4 =$ **34**.

4) $OM = 4 \Leftrightarrow |z| = 4$, ce qui correspond uniquement aux jetons rouges n° 4 (3 jetons) et verts n° 4 (2 jetons), soit 5 jetons sur $\mathscr{C}$ et 10 hors de $\mathscr{C}$. Au moins deux points sur $\mathscr{C}$: $C_5^2 \times C_{10}^1 + C_5^3 = 100 + 10 =$ **110**.

3 pts

B) 1) Nombre total de tirages successifs sans remise de 3 jetons parmi 15 : $A_{15}^{3} = 15 \times 14 \times 13 =$ **2730**.

2) Trois couleurs distinctes : $3! \times (6 \times 5 \times 4) = 6 \times 120 =$ **720**.

3) Somme des numéros égale à 5 (dans l'urne : trois « 1 », trois « 2 », trois « 3 », six « 4 ») : soit {1, 1, 3} $(3 \times A_3^2 \times A_3^1 = 54)$, soit {1, 2, 2} $(3 \times A_3^1 \times A_3^2 = 54)$, total : $54 + 54 =$ **108**.

4) Trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 : l'unique triplet ordonné est (1, 2, 4), soit $A_3^1 \times A_3^1 \times A_6^1 = 3 \times 3 \times 6 =$ **54**.

C) 1) Tirages successifs avec remise de 2 jetons : $15^2 =$ **225**.

2) $M_2 = R(M_1) \Leftrightarrow z_2 = iz_1$: cela se produit uniquement lorsque le 1er jeton est rouge de numéro n $(z_1 = n)$ et le 2ème jeton est vert de même numéro n $(z_2 = in)$, soit : $(1 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 1) + (3 \times 2) = 1 + 1 + 1 + 6 =$ **9** tirages.

Exercice 2 : (4 points)

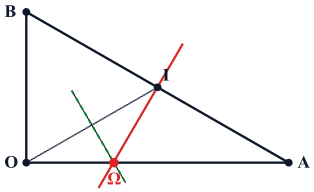
4 pts

1) & 2) I est le milieu de $[AB]$ donc $IA = IB = \frac{1}{2}AB = OB$; de plus $\vec{IA} \neq \vec{OB}$ (les droites (AB) et (OB) sont sécantes en B). Il existe donc une unique rotation R telle que $R(I) = O$ et $R(A) = B$. Dans le triangle OAB rectangle en O avec $OB = \frac{1}{2}AB$, le triangle OIB est équilatéral direct $(OI = IB = OB)$, donc $(\vec{IA}, \vec{OB}) \equiv (\vec{BI}, \vec{BO}) \equiv$ **$-\frac{\pi}{3}$ [2π]** (angle de R).

3), 4) & 5) Le centre Ω est l'intersection des médiatrices de $[IO]$ et $[AB]$. Or dans le triangle équilatéral OIB, $(OB) \perp (OA)$ et $B\hat{O}A = \frac{\pi}{2}$, $I\hat{O}A = \frac{\pi}{6}$; la médiatrice de $[AB]$ passe par I et est perpendiculaire à (AB), elle coupe $[OA]$ en un point Ω tel que $\Omega I = \Omega O$ (car $\Omega\hat{O}I = \Omega\hat{I}O = \frac{\pi}{6}$). Ainsi $\Omega \in$ méd$[IO] \cap$ méd$[AB]$ et $\Omega \in [OA]$. Dans le triangle ΩIA rectangle en I avec $I\hat{A}\Omega = \frac{\pi}{6}$, on a ; comme , : est .

apcpedagogie.com

$\Omega A = 2\Omega I = 2\Omega O\Omega \in [OA]\overrightarrow{\Omega A} = -2\overrightarrow{\Omega O} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{0\Omega}$ **le barycentre de $(O, 2)$ et $(A, 1)$**



Exercice 3 : (5 points)

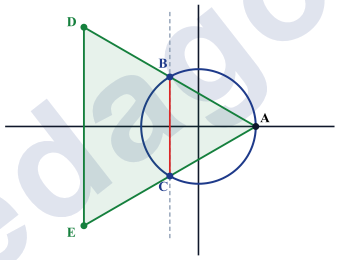
5 pts

1) a-, b- & c- $z^2 = -3 = (i\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow z = \pm i\sqrt{3}$. $(z+1)^2 + 3 = z^2 + 2z + 4$, d'où $z^2 + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = -3$, soit $\boldsymbol{S_{\mathbb{C}} = \{-1 + i\sqrt{3}\ ;\ -1 - i\sqrt{3}\}}$.

2) a- & b- $b = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \boldsymbol{2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))}$. B et C sont les points d'intersection du cercle $(\mathscr{C})$ avec la droite d'équation $x = -1$ ($y_B > 0, y_C < 0$).

3) a- $\frac{a-d}{b-d} = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = 2 \Leftrightarrow a - d = 2(b-d) \Leftrightarrow b = \frac{a+d}{2}$: B est le milieu de $[AD]$ ($D = S_B(A)$).

b-, c- & d- $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OC}) \equiv \arg(c) - \arg(b) \equiv -\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$. Comme $A, B, C \in (\mathscr{C})$, l'angle inscrit $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$; de plus $AB = |b-a| = 2\sqrt{3} = |c-a| = AC$, donc $\boldsymbol{C = R(B)}$. Enfin $d = 2b - a$ et $e = \overline{d} = -4 - 2i\sqrt{3} = 2c - a$, donc C est le milieu de $[AE]$; comme R conserve le milieu et $R(A) = A$, $R(B) = C$, on obtient $\boldsymbol{R(D) = E}$.



Exercice 4 : (6 points)

6 pts

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4 - x \in \mathbb{R}$ et $f(4-x) = \sqrt{(4-x)^2 - 4(4-x) + 8} = \sqrt{x^2 - 4x + 8} = f(x)$: $\Delta : x = 2$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

2) a- & b- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 > 0$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 8}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

3) a- & b- Pour $x > 2$, et tend vers en : est asymptote oblique en et est au-dessus de sur . et le minimum de sur est , donc pour tout . De plus , donc est . ; comme (et), on a . Par récurrence, . Par sommation de à : .

apcpedagogie.com

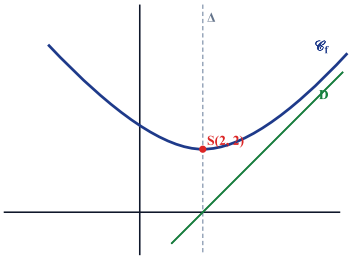
$f(x)-(x-2)=\dfrac{(x^2-4x+8)-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+8}+x-2}=\dfrac{4}{\sqrt{x^2-4x+8}+x-2}>00+\infty D:y=x-2+\infty\mathscr{C}_f D\mathbb{R}$

5) a- & b- $U_0=6\geq 2f\mathbb{R}f(2)=2U_n\geq 2n\in\mathbb{N}{U_{n+1}}^2-{U_n}^2=-4U_n+8=-4(U_n-2)\leq 0(U_n)$ **décroissante**

6) a-, b- & c- $U_{n+1}-2=\dfrac{(U_n-2)^2}{\sqrt{(U_n-2)^2+4}+2}\leq\dfrac{(U_n-2)^2}{4}2\leq U_n\leq 6\Rightarrow 0\leq U_n-2\leq 44<7U_{n+1}-2\leq\dfrac{7}{4}$

$(U_n-2)U_n-2\leq(\dfrac{7}{4})^n\times 4=\dfrac{7^n}{4^{n-1}}\ k=0n2(n+1)\leq S_n\leq 2(n+1)+4\times\dfrac{1-(\frac{7}{4})^{n+1}}{1-\frac{7}{4}}=$

$$\mathbf{2n+2-\frac{16(1-(\frac{7}{4})^{n+1})}{3}}$$



apcpedagogie.com