Année scolaire : 2021 – 2022 | Prof : Bourbia Jaouhar

DEVOIR DE CONTRÔLE N°2

Épreuve : Mathématiques | Classe : 3ème Mathématiques | Durée : 2 heures

EXERCICE 1 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ **a-** Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$.

b- Étudier les variations de f puis préciser les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

c- Construire la courbe $\mathscr{C}$.

2/ Soit D_m la droite d'équation $y = 2x + m$, où $m \in \mathbb{R}$.

a- Montrer que pour tout réel m, D_m coupe $\mathscr{C}$ en deux points M' et M'' distincts.

b- Déterminer l'ensemble des milieux I_m des segments $[M'M'']$ quand m varie.

3/ Soit $A(1, -1)$, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et R' le repère $(A, \vec{u}, \vec{j})$.

a- Montrer que $\mathscr{C}$ est la courbe de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{4}{x}$ dans le repère R'.

b- Donner relativement à R' une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ en un point M_0 d'abscisse x_0.

c- Déterminer les coordonnées des points T et T' intersection de Δ avec $D(A, \vec{u})$ et $D'(A, \vec{j})$. Montrer que M_0 est le milieu de $[TT']$.

d- Montrer que pour tout point M_0, les droites (AT) et (AT') sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = -\dfrac{x^2}{4} + x + 1$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Étudier la fonction f et représenter sa courbe $\mathscr{C}$.

2/ Soit m un paramètre réel, on considère les droites D_m d'équations $y = mx + 4 - 3m$. Prouver que toutes les droites passent par un point fixe que l'on déterminera.

3/ Soit $F(2, 1)$ et D la droite d'équation : $y = 3$. Soit M un point quelconque du plan de coordonnées (x, y) et on désigne par H son projeté orthogonal sur D.

a- Montrer que $MF^2 - MH^2 = x^2 - 4x + 4y - 4$.

b- Que se passe-t-il si M est un point de $\mathscr{C}$? Quelle est, dans ce cas, la nature du triangle MFH ?

apcpedagogie.com

EXERCICE 3 : (5 points)

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1/ **a-** Montrer que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

b- En déduire que $\cos(2\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

2/ **a-** Vérifier que α est solution de l'équation : $\cos(4x) = \sin(x)$.

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(4x) = \sin(x)$. En déduire que $\alpha = \frac{\pi}{10}$.

3/ **a-** Montrer que pour tout réel x on a : $\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x + (\sqrt{5}-1)\sin x = 4\cos(x - \frac{\pi}{10})$.

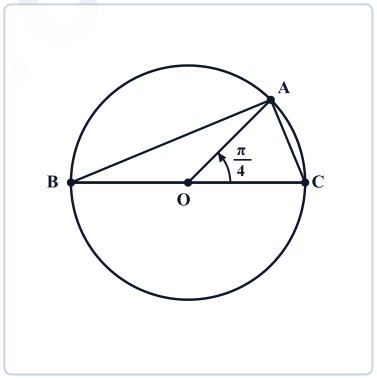
b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x + (\sqrt{5}-1)\sin x = 2$.

c- Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation : $\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x + (\sqrt{5}-1)\sin x \geq 2$.

EXERCICE 4 : (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de diamètre $[BC]$ et de centre O.

A un point de $(\mathscr{C})$ tel que : $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, I le point de $[AB]$ tel que $AI = AC$.



1/ **a-** Montrer que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{8}\ [2\pi]$.

b- En déduire que le triangle IBC est isocèle en I.

2/ **a-** Montrer qu'il existe une seule rotation R telle que : $R(C) = I$ et $R(I) = B$.

b- Préciser l'angle de R et construire son centre Ω.

c- Montrer que Ω appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

d- Montrer que O, I et Ω sont alignés.

3/ La médiatrice de $[IB]$ recoupe $(\mathscr{C})$ en J.

a- Montrer que A et J sont symétriques par rapport à (OI) et que C, I et J sont alignés.

b- En déduire que $R(A) = J$.

apcpedagogie.com