Date : 14 / 02 / 2026 — **Année scolaire : 2025 / 2026**

CORRECTION DU DEVOIR DE CONTRÔLE N°2

Épreuve : Mathématiques — **Niveau : 3ème Mathématiques** — **Coefficient : 4** — **Durée : 2 heures**

Exercice N°1 : (9 points)

1 pt

(I) Pour tout $x \neq 1$, $h_m(x) = \dfrac{m(x^2-4)+x^2}{x-1}$. $h_m(x)$ est indépendant de m si et seulement si $x^2-4=0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x=-2$.

• Pour $x=2$, $h_m(2)=4$; • Pour $x=-2$, $h_m(-2)=-\dfrac{4}{3}$.

Toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par les deux points fixes $\boxed{A(2,4)}$ et $\boxed{B(-2,-\dfrac{4}{3})}$.

3 pts

(II) 1) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$: la droite $\boxed{D : x=1}$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

2) a- $ax+b+\dfrac{c}{x-1} = \dfrac{ax^2+(b-a)x+(c-b)}{x-1}$. Par identification avec $\dfrac{x^2}{x-1}$: $a=1, b=1, c=1$,

donc $\boxed{f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}}$.

b- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$: $\Delta : y=x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $\pm\infty$.

c- $f(x)-(x+1) = \dfrac{1}{x-1}$: $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ sur $]-\infty,1[$ et au-dessus de Δ sur $]1,+\infty[$.

3) $\{I\} = D \cap \Delta \Rightarrow I(1,2)$. Pour tout $x \neq 1$, $2-x \neq 1$ et $f(2-x)+f(x) = (3-x+\dfrac{1}{1-x})+(x+1+\dfrac{1}{x-1}) = 4 = 2\times2$: $I(1,2)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

5 pts

4) a- f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

b- & 6) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	$-\ \|\|\ -$	0	+
$f(x)$	$-\infty\ \nearrow$	0	$\searrow -\infty\ \|\|\ +\infty\ \searrow$	4	$\nearrow +\infty$

• Discussion graphique ($f(x)=k$) : si $k \in]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$: **2** solutions ; si $k \in \{0,4\}$: **1** solution ; si $k \in]0,4[$: **0** solution.

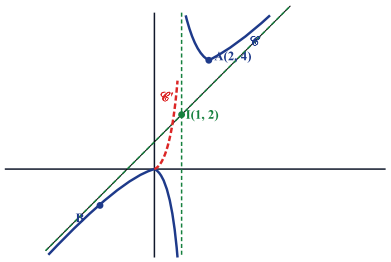
(III) 1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{|x|}{|x-1|} = 0 \in \mathbb{R}$: g est dérivable en 0 ($g'(0)=0$) et $\mathscr{C}'$ admet une tangente horizontale au point $O(0,0)$.

2) a- Expression de $g(x)$ en fonction de $f(x)$:

x	$]-\infty,0]$	$[0,1[$	$]1,+\infty[$
$g(x)$	$f(x)$	$-f(x)$	$f(x)$

(II) 5) & (III) 2) b- Tracé de $\mathscr{C}$ (en bleu) et $\mathscr{C}'$ (en rouge, symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à (Ox) sur $[0,1[$) :

apcpedagogie.com



Exercice N°2 : (5 points)

5 pts

1) a- ABC est direct et isocèle en A avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}$ [2π], donc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} \equiv$ **$\frac{3\pi}{8}$ [2π]**.

b- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) + \pi \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} + \pi \equiv$ **$-\frac{\pi}{4}$ [2π]**.

2) a- On a $AB = AC = IC$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{IC}$ (car $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) \equiv -\frac{\pi}{4}$ [2π]) : il existe donc une unique rotation R telle que $R(A) = I$ et $R(B) = C$.

b- Une mesure de l'angle de R est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) \equiv$ **$-\frac{\pi}{4}$ [2π]**.

c- Les droites (AI) et (BC) n'étant pas parallèles, le centre O est le point d'intersection des médiatrices : $\{O\}$ = méd$[AI]$ ∩ méd$[BC]$ = (CJ) ∩ (AK).

d- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}$ [2π], donc $(AB) \perp (AI)$. Comme $(CO) = (CJ) =$ méd$[AI] \perp (AI)$, on a $(CO) // (AB)$. De plus $(AO) = (AK) =$ méd$[BC]$ donc $OB = OC$ et $AB = AC$. Par angles alternes-internes, $COA = OAB = OAC$, donc $CA = CO$: ainsi $AB = BO = OC = CA$ et $ABOC$ est un **losange**.

3) a- $R \circ R(B) = R(R(B)) = R(C) =$ **D**.

b- $R \circ R$ est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$; comme $R \circ R(B) = D$, on a $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) \equiv -\frac{\pi}{2}$ [2π], d'où **$(OB) \perp (OD)$**.

c- K est le milieu de $[BC]$ et R conserve le milieu : $R(K)$ est le milieu de $[R(B)R(C)] = [CD]$, donc $R(K) = H$. Comme R conserve les distances et $R(O) = O$, on a **$OK = OH$**.

Exercice N°3 : (6 points)

3,5 pts

1) a- $|z_A| = \sqrt{4 + 12} = 4$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où **$\arg(z_A) \equiv -\frac{\pi}{3}$ [2π]**.

b- $z_A = [4, -\frac{\pi}{3}]$ et $z_B = [4, \frac{\pi}{6}]$, d'où **$\frac{z_B}{z_A} = [1, \frac{\pi}{2}] = i$**.

c- $|\frac{z_B}{z_A}| = 1 \Leftrightarrow OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}$ [2π] : OAB est un triangle direct **isocèle et rectangle en O**.

2) a- $z_C = z_A + z_B \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ donc $BOAC$ est un parallélogramme. De plus $OA = OB$ et $(OA) \perp (OB)$: $BOAC$ est un **carré**.

b- $z_C = (2 - 2i\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + 2i) =$ **$(2 + 2\sqrt{3}) + i(2 - 2\sqrt{3})$**. et . et .

apcpedagogie.com

c- $|z_C| = OC = OA\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{12}$ $[2\pi]$

d- $\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(-\frac{\pi}{12}) = \frac{2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ $\sin(\frac{\pi}{12}) = -\sin(-\frac{\pi}{12}) = -\frac{2-2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

2,5 pts

3) a- $z_G = \overline{z_B} \Rightarrow \arg(z_G) \equiv -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$, d'où $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6}) \equiv \boxed{\frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$.

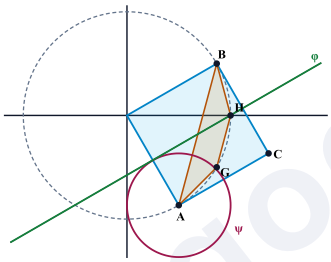
b- $OG = |\overline{z_B}| = |z_B| = OB = 4$ et $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$: OGB est **équilatéral**.

c- $OH = OG = 4$ et $CH = CG = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$, donc $(OC) =$ méd$[GH]$. Or $(OC) =$ méd$[AB]$ (diagonale du carré $BOAC$). Ainsi (GH) // (AB) et la symétrie orthogonale $S_{(OC)}$ transforme B en A et G en H, d'où $BG = AH$: $BAGH$ est un **trapèze isocèle**.

4) • $|z - (2 - 2i\sqrt{3})| = |z| \Leftrightarrow AM = OM$: **φ = méd[*OA*]**.

• $|\frac{1}{2}\overline{z} - 1 - i\sqrt{3}| = 1 \Leftrightarrow |\overline{z} - 2 - 2i\sqrt{3}| = 2 \Leftrightarrow |z - (2 - 2i\sqrt{3})| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$: **ψ = 𝒞(*A*, 2)**.

1) d- Construction géométrique de A, B, C, G, H et des ensembles φ et ψ :



apcpedagogie.com