Date : 14 / 02 / 2026 **Année scolaire : 2025 / 2026**

DEVOIR DE CONTRÔLE N°2

Épreuve : Mathématiques **Niveau : 3ème Mathématiques** **Coefficient : 4** **Durée : 2 heures**

Notez-bien : *Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté des réponses. Aucun document n'est autorisé, sauf une calculatrice non programmable. L'indication des références des exercices et des questions est obligatoire.*

Exercice N°1 : (9 points)

(I) Soit h_m la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $h_m(x) = \dfrac{(m+1)x^2 - 4m}{x-1}$, où m est un paramètre réel, et on désigne par $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par deux points fixes A et B que l'on déterminera.

(II) Soient $m = 0$, $f = h_0$ et $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0$; ainsi $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

1) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale D dont on déterminera une équation.

2) **a-** Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq 1$, on ait : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

b- En déduire que la droite $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de ∞.

c- Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

3) Soit I le point d'intersection de D et Δ ; montrer que I est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

4) **a-** Justifier que f est dérivable en tout réel $x \neq 1$ puis vérifier que : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

b- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5) Tracer, avec soin sur l'annexe ci-jointe, la courbe $\mathscr{C}$.

6) Discuter selon le paramètre réel k le nombre de solutions éventuelles de l'équation : $f(x) = k$.

(III) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $g(x) = \dfrac{x|x|}{|x-1|}$ de courbe représentative $\mathscr{C}'$ dans le même repère.

1) Étudier la dérivabilité de g en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) **a-** Recopier et compléter le tableau ci-dessous par l'expression de $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

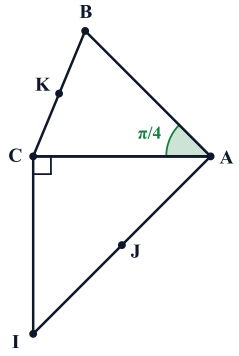
x	$-\infty$	0	0	1	1	$+\infty$
$g(x)$						

b- Tracer, alors, d'une autre couleur la courbe $\mathscr{C}'$ à partir de $\mathscr{C}$.

Exercice N°2 : (5 points)

apcpedagogie.com

On considère dans le plan P orienté dans le sens direct (figure ci-contre) :



• un triangle ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$;

• I le point tel que ACI soit un triangle direct isocèle et rectangle en C ;

• J et K les milieux respectifs des segments $[AI]$ et $[BC]$.

1) **a-** Prouver que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{3\pi}{8}$ $[2\pi]$.

b- Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) \equiv -\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

2) **a-** Justifier qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en I et B en C.

b- Déterminer une mesure de l'angle de R.

c- Dire comment peut-on construire le centre O de R.

d- Montrer que $ABOC$ est un losange.

3) Soit $D = R(C)$.

a- Déterminer $R \circ R(B)$.

b- En déduire que $(OB) \perp (OD)$.

c- Soit H le milieu du segment $[CD]$; montrer que $OK = OH$.

Exercice N°3 : (6 points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_B = 4(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}))$.

1) **a-** Déterminer le module et un argument de z_A.

b- Écrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme polaire.

c- Préciser, alors, la nature du triangle OAB.

d- Construire soigneusement les points A et B sur l'annexe ci-jointe.

2) Soit C le point de P d'affixe : $z_C = z_A + z_B$.

a- Montrer que le quadrilatère $BOAC$ est un carré.

b- Écrire z_C sous la forme algébrique.

c- Donner le module et un argument de z_C.

d- En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

3) Soient G et H les points de P d'affixes respectives : $z_G = \overline{z_B}$ et $z_H = 4$.

a- Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OB})$.

b- En déduire que le triangle OGB est équilatéral.

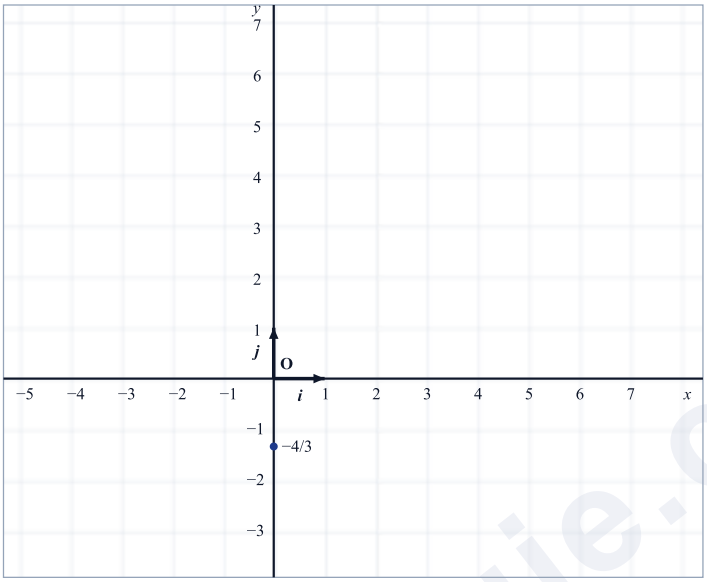
c- Montrer que le quadrilatère $BAGH$ est un trapèze isocèle.

apcpedagogie.com

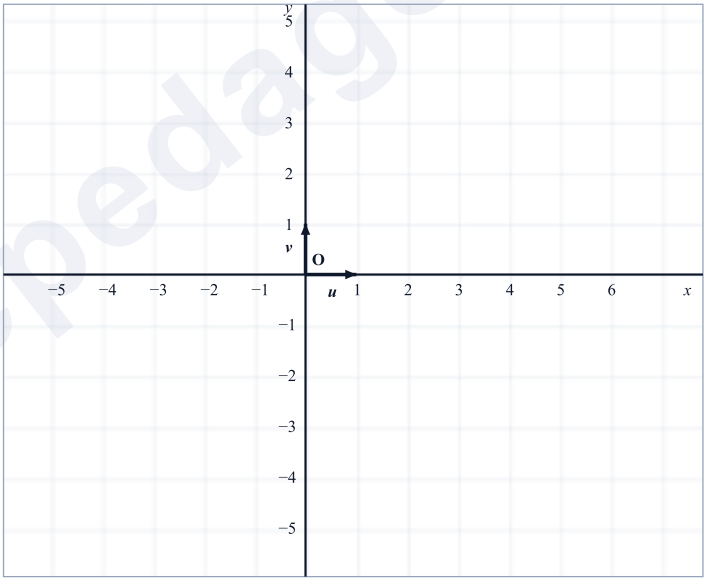
4) Déterminer chacun des ensembles suivants : $\varphi = \{ M(z) \in P / |z - 2 + 2i\sqrt{3}| = |z| \}$ et $\psi = \{ M(z) \in P / |\frac{1}{2}\bar{z} - 1 - i\sqrt{3}| = 1 \}$.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE **Nom et prénom : ..... Classe : 3M N° : .....**

Exercice N°1 :



Exercice N°3 :



apcpedagogie.com