Année scolaire : 2026 – 2027

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques | **Classe : 3ème Sciences Techniques** | **Durée : 3 heures**

Exercice 1 : (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie en justifiant votre choix.

1. On considère le nombre complexe $z = -\sqrt{3} + i$. La forme exponentielle (ou polaire) de z est :

a) $[2 ; \frac{5\pi}{6}]$ **b)** $[2 ; -\frac{\pi}{6}]$ **c)** $[2 ; \frac{2\pi}{3}]$

2. Le nombre d'anagrammes distinctes que l'on peut former avec les lettres du mot « **MATHS** » est :

a) 25 **b)** 60 **c)** 120

3. Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \frac{3n-1}{n+2}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ est égale à :

a) $-\frac{1}{2}$ **b)** 3 **c)** $+\infty$

4. Dans le plan complexe, l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $|z - 2 + i| = 3$ est :

a) le cercle de centre $I(2 ; -1)$ et de rayon 3 **b)** le cercle de centre $I(-2 ; 1)$ et de rayon 3 **c)** une droite

Exercice 2 : (5 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i$.

1. **a)** Écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.

b) En déduire la forme trigonométrique du produit $z_A \times z_B$.

2. **a)** Calculer la forme algébrique du produit $z_A \times z_B$.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

3. **a)** Vérifier que $z_C = z_A + z_B$. En déduire la nature du quadrilatère $OACB$.

b) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : $|z - \sqrt{3} - i| = |z - 1 - i|$.

Exercice 3 : (5 points)

I/ Une boîte contient 9 composants électroniques indiscernables au toucher : 4 résistances, 3 condensateurs et 2 diodes. On prélève au hasard et **simultanément** 3 composants de cette boîte.

1. Dénombrer tous les prélèvements possibles. **2.** Dénombrer les prélèvements contenant trois composants de même nature.

3. Dénombrer les prélèvements contenant exactement un composant de chaque type (tricolore / hétérogène).

4. Dénombrer les prélèvements contenant au moins une diode.

II/ On considère la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

apcpedagogie.com

1. **a)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3$. (On pose $V_n = U_n - 3$: vérifier que $V_0 = 0$ et $V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n$).

b) On modifie le premier terme en posant $U_0 = 6$ avec la même relation de récurrence. Montrer que $V_n = U_n - 3$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, exprimer U_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. **a)** Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Vérifier que pour tout $x \neq 1$, $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x - 1}$. En déduire que la droite $D : y = x - 2$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

2. **a)** Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}$. **b)** Dresser le tableau de variation de f.

3. **a)** Montrer que le point $\Omega(1 ; -1)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 0. **c)** Tracer D, (T) et $(\mathscr{C}_f)$.

apcpedagogie.com