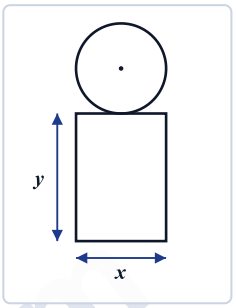
Année scolaire : 2026 – 2027

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques | **Classe : 3ème Sciences Techniques** | **Durée : 2 heures**

EXERCICE N° 1 : (3.5 points)



On se propose de fabriquer à l'aide d'un fil métallique de longueur 1 mètre, un objet formé d'un cercle et d'un rectangle tels que le rectangle et le cercle sont situés dans le même plan et sont tangents extérieurement (voir figure). Le diamètre du cercle est égal à la mesure x de l'un des côtés du rectangle.

1) **a)** Montrer que : $y = \dfrac{1 - x(\pi + 2)}{2}$. **b)** Prouver que : $x \in \left]0 ; \dfrac{1}{\pi + 2}\right[$.

2) On pose $S(x)$: la surface du rectangle.

a) Donner l'expression de $S(x)$ en fonction de x puis donner son sens de variations sur $\left]0 ; \dfrac{1}{\pi + 2}\right[$.

b) Déterminer la valeur de x pour laquelle la surface $S(x)$ est maximale.

EXERCICE N° 2 : (5.5 points)

I) Dans un examen un élève doit tirer simultanément et au hasard trois questions parmi 10 réparties de la manière suivante : 5 questions d'analyse ; 3 questions de géométrie et 2 questions de dénombrement. On considère les évènements suivants :

A : « L'élève tire trois questions du même chapitre » ; B : « L'élève tire trois questions de trois chapitres différents » ;

C : « L'élève tire trois questions de deux chapitres différents » ; D : « L'élève tire au moins une question du chapitre dénombrement ».

1) Déterminer le cardinal des ensembles A, B, C et D. **2)** Déterminer le cardinal des ensembles $C \cap D$ et $C \cup D$.

II) On suppose maintenant que l'élève doit tirer l'un après l'autre trois questions différentes parmi les 10. On considère les évènements suivants : E : « L'élève tire trois questions d'analyse » ; F : « L'élève tire au plus deux questions d'analyse » ; G : « La première question tirée par l'élève est une question de géométrie ».

1) Déterminer le cardinal des ensembles suivants E, F et G.

2) On suppose que parmi les 5 questions d'analyse il y a trois questions difficiles, parmi les 3 questions de géométrie il y a deux questions difficiles et les deux questions de dénombrement sont faciles. On considère l'évènement : H : « L'élève tire une seule question difficile et une seule question d'analyse ». Déterminer card(H).

apcpedagogie.com

EXERCICE N° 3 : (4.5 points)

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \dfrac{1}{2^n}$.

1) **a)** Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. **b)** Calculer la limite de la suite (U_n).

2) On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $V_n > 1$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{2}(1 - V_n)$. **c)** Déduire alors le sens de variations de la suite (V_n).

3) **a)** Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $V_n = 1 + U_n$. **b)** En déduire la limite de la suite (V_n).

EXERCICE N° 4 : (6.5 points)

A) **1) a)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 = -3$. **b)** Développer $(Z-1)^2$ puis déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^2 - 2Z + 4 = 0$.

2) Soit l'équation (E) : $Z^3 + 8 = 0$. **a)** Vérifier que : $Z^3 + 8 = (Z+2)(Z^2 - 2Z + 4)$. **b)** Résoudre alors, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

B) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $R(O, \vec{u}, \vec{v})$ (Unité : 2 cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $Z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $Z_C = -2$.

1) a) Écrire sous forme trigonométrique Z_A, Z_B et Z_C. **b)** Déduire que les points A, B et C appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 2. **c)** Placer les points A, B et C dans le repère R.

2) a) Calculer les distances AB, AC et BC. **b)** Déduire la nature du triangle ABC. **c)** Déterminer l'affixe Z_D du point D pour lequel $ABDC$ soit un losange.

3) Soit $(\Gamma) = \{M \in P$ d'affixes Z telles que $\arg\left(\dfrac{Z^2}{1 + i\sqrt{3}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)\}$. Déterminer et construire (Γ).

apcpedagogie.com