Année scolaire : 2026 – 2027

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques — Classe : 3ème Sciences Techniques — Barème : 20 points

Exercice 1 : QCM justifié (4 points)

4 pts

1. **a) $[2\ ;\ \frac{5\pi}{6}]$** — $|z| = \sqrt{3+1} = 2$ et $z = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$.

2. **c) 120** — Le mot « MATHS » comporte 5 lettres toutes distinctes : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

3. **b) 3** — $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{n} = 3$.

4. **a) le cercle de centre $I(2\ ;-1)$ et de rayon 3** — $|z-(2-i)| = 3 \Leftrightarrow IM = 3$.

Exercice 2 : Nombres complexes (5 points)

5 pts

1. a) & b) $|z_A| = \sqrt{3+1} = 2$ et $\arg(z_A) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, d'où $z_A = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$. De même $z_B = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Donc $z_A \times z_B = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})) =$ **$2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$**.

2. a) & b) $z_A \times z_B = (\sqrt{3}+i)(1+i) = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$. Par identification :

$\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et **$\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$**.

3. a) & b) $z_A + z_B = (\sqrt{3}+1) + 2i$: $OACB$ est un parallélogramme ($\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$). $|z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow AM = BM$: (Δ) est la **médiatrice du segment $[AB]$**.

Exercice 3 : Dénombrement et suite récurrente (5 points)

5 pts

I/ 1., 2., 3. & 4. Prélèvements simultanés de 3 composants parmi 9 (4 R, 3 C, 2 D) :

• Nombre total : $C_9^3 = \frac{9\times8\times7}{6} =$ **84**. • De même nature (3 R ou 3 C) : $C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 =$ **5**.

• Un de chaque type : $C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4\times3\times2 =$ **24**. • Au moins une diode : $C_9^3 - C_7^3 = 84 - 35 =$ **49**.

II/ 1. a) & b) • $V_0 = 3-3 = 0$ et $V_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}(U_n - 3) = \frac{1}{3}V_n$: ainsi $V_n = 0$, donc $U_n = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Avec $U_0 = 6$: $V_0 = 3$ et $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$, donc $V_n = 3\times(\frac{1}{3})^n$, $U_n = 3 + 3\times(\frac{1}{3})^n$ et **$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$**.

Exercice 4 : Étude d'une fonction rationnelle (6 points)

apcpedagogie.com

1. a) & b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C}_f)$. De plus $(x-2) + \dfrac{4}{x-1} = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1} = f(x)$; comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0$, $D : y = x - 2$ est asymptote oblique. **6 pts**

2. a) & b) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$, avec $f(-1) = -5$ et $f(3) = 3$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	**-5**	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	**3**	↗	$+\infty$

3. a) & b) Pour tout $x \neq 1$, $f(2-x) + f(x) = (-x + \dfrac{4}{1-x}) + (x - 2 + \dfrac{4}{x-1}) = -2 = 2(-1)$: $\Omega(1\ ;-1)$ est bien centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$. Au point d'abscisse 0 : $f(0) = -6$ et $f'(0) = -3$, d'où **$(T) : y = -3x - 6$**.

apcpedagogie.com