Année scolaire : 2018 – 2019 (2ème Semestre) — Prof : Lotfi Mansouri

CORRECTION DU DEVOIR DE CONTRÔLE N°2

Épreuve : Mathématiques — Classe : 3ème Mathématiques — Barème : 20 points

Exercice 1 : (6 points)

6 pts

1. & 2. Graphiquement, $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[}$, et f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.

La droite Δ passe par $(-5, 0)$ et $(-1, 8)$: son coefficient directeur est $a = \dfrac{8-0}{-1-(-5)} = 2$ et $b = 10$, d'où $\boxed{\Delta : y = 2x + 10}$.

3. a) & b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$.

• Comme $\Delta : y = 2x + 10$ est asymptote en $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2x + 10)] = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 2x) = 10}$.

• Comme C_f est au-dessus de l'asymptote $y = 1$ au voisinage de $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$, donc $1 - f(x) \to 0^-$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{1-f(x)} = -\infty}$.

• Au point $C(-3, 5{,}5)$, la demi-tangente à droite passe par $(-1, 6)$: sa pente vaut $\dfrac{6-5{,}5}{-1-(-3)} = \dfrac{1}{4}$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{f(x)-5{,}5}{x+3} = f'_d(-3) = \dfrac{1}{4}}$.

• En $B(\frac{1}{2}, 5)$, la tangente est horizontale donc $f'(\frac{1}{2}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{f(x)-5}{x-\frac{1}{2}} = 0$ (avec $f(x) < 5$ près de $\frac{1}{2}$) ; d'où $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{f(x)-5} = 2 \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{x-\frac{1}{2}}{f(x)-5} = \boxed{-\infty}$.

4. & 5. $f(3) = 2{,}5$; la tangente T en $A(3, 2{,}5)$ passe par $(1, 3{,}5)$ et $(5, 1{,}5)$, donc $f'(3) = -\frac{1}{2}$; $f'(\frac{1}{2}) = 0$; $f'_d(-3) = \frac{1}{4}$. Par approximation affine, $f(3{,}001) \approx f(3) + 0{,}001 \times f'(3) = 2{,}5 - 0{,}0005 = \boxed{2{,}4995}$.

• Demi-tangente verticale dirigée vers le bas à gauche de $C(-3, 5{,}5)$: $\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{f(x)-5{,}5}{x+3} = \boxed{+\infty}$.

• Comme $f(-5) = 0$, $\lim\limits_{x\to-5^+} \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)} = \dfrac{1+0}{1-0} = \boxed{1}$.

6. Tableau de variation : f est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, \frac{1}{2}]$, puis strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Elle admet un unique **maximum local** en $x = \frac{1}{2}$ égal à $\boxed{f(\frac{1}{2}) = 5}$.

Exercice 2 : (6 points)

apcpedagogie.com

I/ 1) & 2) Comme fonction rationnelle, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x)}{(x-1)^2} = \boxed{\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}}$. 6 pts

a) Tangente parallèle à $(O, \vec{i}) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$: points $\boxed{E(-1, 1) \text{ et } F(3, 9)}$.

b) Tangente parallèle à $\Delta : y = -3x+1 \Leftrightarrow f'(x) = -3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 = -3(x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2-8x=0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$: points $\boxed{O(0, 0) \text{ et } G(2, 10)}$.

II/ 1) & 2) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \sqrt{0} = 0 = g(0)$: g est **continue en 0**.

Dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = f'(0) = -3$ (demi-tangente à gauche de pente -3) ; et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1+\dfrac{2}{x}} = +\infty$: g **n'est pas dérivable en 0** et C_g admet en O(0, 0) une **demi-tangente verticale dirigée vers le haut** à droite.

3) & 4) Sur $]-\infty, 0[$, $g'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ (> 0 sur $]-\infty, -1[$, < 0 sur $]-1, 0[$; sur $]0, +\infty[$, $x^2+2x > 0$ donc $g'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} > 0$. Extrémums : **maximum local** en $x = -1$ égal à $\boxed{g(-1) = 1}$ et **minimum local** en $x = 0$ égal à $\boxed{g(0) = 0}$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$ ‖ $+$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ 0 ↗	$+\infty$

Exercice 3 : (3 points)

1., 2. & 3. Comme $\cos(2x) = 1-2\sin^2 x$, on a $f(x) = 2(1-2\sin^2 x)+7\sin x-5 = -4\sin^2 x+7\sin x-3$, d'où $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4y^2-7y+3=0$ (ou $2(2y^2-7y+3)$ selon la forme attendue ; les racines de $4y^2-7y+3=0$ étant $y_1 = 1$ et $y_2 = \dfrac{3}{4}$, et celles de $2y^2-7y+3=0$ étant $y_1 = 3 \notin [-1, 1]$ et $y_2 = \dfrac{1}{2}$). 3 pts

En retenant l'équivalence de la question 2 : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2}$, l'unique solution dans $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ est $\boxed{S = \{\dfrac{\pi}{6}\}}$.

Exercice 4 : (5 points)

I/ 1. & 2. Par transformation somme-produit, $\cos x + \cos(3x) = 2\cos(2x)\cos x$, d'où $2\cos(2x)\cos(4x) - (\cos x + \cos(3x)) = 2\cos(2x)(\cos(4x) - \cos x)$. 5 pts

L'équation équivaut à $\cos(2x) = 0$ ou $\cos(4x) = \cos x$, soit $2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ou $4x = x + 2k\pi$ ou $4x = -x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), c'est-à-dire $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \; ; \; \dfrac{2k\pi}{3} \; ; \; \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\}}$. Dans $[0, \pi]$:

$\boxed{S_{[0,\pi]} = \{0 \; ; \; \dfrac{\pi}{4} \; ; \; \dfrac{2\pi}{5} \; ; \; \dfrac{2\pi}{3} \; ; \; \dfrac{3\pi}{4} \; ; \; \dfrac{4\pi}{5}\}}$.

II/ 1. à 4. • (constante). • Ainsi . • Comme et , et sont les deux racines de , à savoir et . Donc ou , d'où .

apcpedagogie.com

$\Phi(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sin^2 x \cos^2 x = 1^3 =$ **1**

$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{7}{16} \Leftrightarrow 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{16}$

$\alpha + \beta = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \alpha\beta = \frac{3}{16}$ $\alpha\beta y^2 - y + \frac{3}{16} = 0 \frac{1}{4} \frac{3}{4} \sin^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 x = \frac{3}{4}$

$$S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} ; \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

apcpedagogie.com