Date : 13 Mars 2024 **Année scolaire : 2023 / 2024**

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques **Niveau : 3ème Année** **Section : Mathématiques** **Durée : 3 heures**

Le sujet comporte 5 exercices dont l'annexe ci-jointe (Figures 1 et 2) est à rendre avec la copie.

Exercice N°1 : (4,5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tels que : $a = -2 + 2i\tan(\alpha)$, $a \times b = -16i$ et $c = -4$, avec $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

A) On prend $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

1) Donner l'écriture trigonométrique de a puis construire le point A.

2) **a-** Montrer que B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

b- Construire le point B.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + 2(2+\sqrt{3})z + 8 + 4\sqrt{3} = 0$.

a- Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z^2 + 2(2+\sqrt{3})z + 8 + 4\sqrt{3} = (z + 2 + \sqrt{3})^2 + 1$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

4) On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que $\mathrm{Im}(z_1) > 0$, et M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a- Vérifier que M_1 est le milieu de $[BC]$.

b- Construire les points M_1 et M_2.

B) On prend $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1) Sur quelle ligne fixe se déplace le point A quand α varie dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$?

2) Déterminer la forme trigonométrique de a.

3) **a-** Montrer que $b - 4i = 4(-\sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha))$.

b- En déduire l'ensemble des points B quand α varie dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice N°2 : (5,5 points)

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 - \frac{4}{U_n^2 + 3}} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

apcpedagogie.com

1) Sur l'annexe fournie (Figure 1), on donne la droite $\Delta : y = x$ ainsi que la courbe $(\Gamma) : y = \sqrt{2 - \frac{4}{x^2+3}}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a- On a placé U_0 sur $(O, \vec{i})$. Placer sur $(O, \vec{i})$ les termes U_1 et U_2 (on ne demande pas de les calculer).

b- Conjecturer le sens de variation de la suite (U_n).

2) **a-** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 < U_n \leq \sqrt{2}$.

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{(1 - U_n^2)(2 + U_n^2)}{3 + U_n^2}$.

c- En déduire le sens de variation de (U_n).

3) **a-** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1}^2 - 1 \leq \frac{U_n^2 - 1}{4}$.

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n^2 - 1 \leq (\frac{1}{4})^n$.

c- En déduire que $U_n - 1 \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^n$ puis déterminer la limite de (U_n).

4) **a-** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^2 \leq 4^n$.

b- En déduire la limite de la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = n(U_n^2 - 1)$.

5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k^2$ et $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{k}$.

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n \leq S_n \leq n + \frac{1}{3}$ et calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

b- En déduire $\lim_{n \to +\infty} T_n$.

Exercice N°3 : (3 points)

On dispose d'une urne contenant 10 boules réparties de la manière suivante : **5 boules rouges** numérotées 0, 1, 3, 3 et 3 ; **3 boules vertes** numérotées 0, 1 et 3 ; **2 boules noires** numérotées 0 et 2.

1) On tire simultanément 3 boules de l'urne.

a- Déterminer le nombre des tirages possibles contenant 3 boules de couleurs différentes.

b- Déterminer le nombre des tirages possibles contenant 2 boules portant le numéro 0 et une seule boule noire.

c- On note p le produit des numéros des boules tirées. Déterminer le nombre des tirages possibles vérifiant $p \in [0, 3]$.

2) Après avoir remis toutes les boules tirées dans l'urne, on tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne. On désigne par a, b et c les numéros respectifs de la première, de la deuxième et de la troisième boule tirée. Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = a$ et $U_{n+1} = C_3^b U_n + c$.

a- Dénombrer les cas possibles d'avoir une deuxième boule numéro 3 au troisième tirage.

b- Déterminer le nombre des tirages possibles où la suite (U_n) est arithmétique.

c- Déterminer le nombre des tirages possibles où la suite (U_n) est géométrique non constante.

apcpedagogie.com

Exercice N°4 : (3,5 points)

1) **a-** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $4^{3n} - 1$.

b- En déduire les restes de la division euclidienne de 4^{3n+1} par 7 et de 4^{3n+2} par 7.

Dans la suite de l'exercice, on considère dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation (E) : $3x - 5y = 7$.

2) **a-** Vérifier que (4, 1) est une solution de (E).

b- Résoudre alors dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation (E).

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a = 5n + 4$ et $b = 3n + 1$, et on désigne par $d = a \wedge b$.

a- Vérifier que (a, b) est une solution de (E).

b- En déduire que d divise 7.

c- Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que : $d = 7$ si et seulement si 7 divise $n - 2$.

4) En déduire les entiers naturels p pour que : $(5 \times 4^p + 4) \wedge (3 \times 4^p + 1) = 7$.

Exercice N°5 : (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x-1}$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) **a-** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b- Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat.

2) Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite $D : y = 2x$, la courbe $(C_1) : y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ pour tout $x > 1$ et la courbe $(C_2) : y = x^2 - \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. La droite D coupe la courbe (C_1) en un seul point d'abscisse α.

a- Déterminer graphiquement le signe de $(2x - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}})$ pour tout $x > 1$.

b- Vérifier que $f(\alpha) = \alpha^2 - \dfrac{1}{\alpha}$.

c- Construire le point $A(\alpha, f(\alpha))$.

d- Dresser le tableau de variations de f.

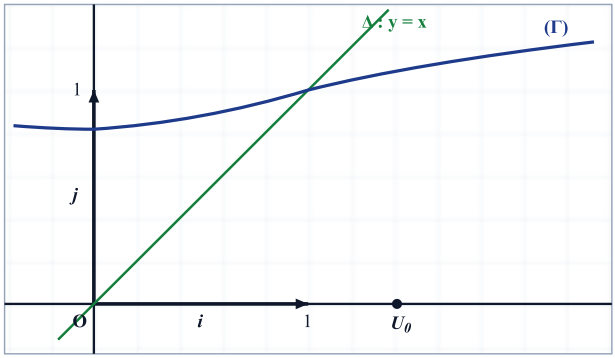
e- Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2.

3) Tracer sur le même repère la tangente (T) et la courbe (C_f).

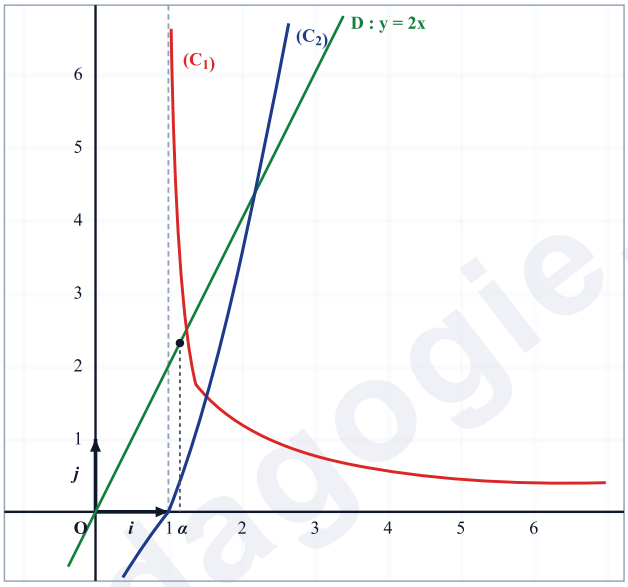
ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE **Nom : ..... Prénom : ..... Classe : 3M N° : .....**

apcpedagogie.com

Exercice N°2 — Figure 1 :



Exercice N°5 — Figure 2 :



apcpedagogie.com