Année scolaire : 2026 – 2027

CORRECTION DU DEVOIR DE CONTRÔLE N°2

Épreuve : Mathématiques — Classe : 3ème Sciences Techniques — Barème : 20 points

Exercice 1 : Étude de fonction (6 points)

6 pts

1) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$. Extremum en -2 égal à -2 : $f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a - 4b = 0 \Leftrightarrow b = 3a$ et $f(-2) = -2 \Leftrightarrow -8a + 4b + 2 = -2 \Leftrightarrow 4a = -4$, soit $\boxed{a = -1 \text{ et } b = -3}$.

2) a) $f'(x) = -3x^2 - 6x = -3x(x + 2)$, $f(-2) = -2$ et $f(0) = 2$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

b), c) & d) • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-2 - x) + f(x) = -(-2 - x)^3 - 3(-2 - x)^2 + 2 - x^3 - 3x^2 + 2 = 0$: $I(-1 ; 0)$ est centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

• Tangente Δ en $I(-1 ; 0)$: $f'(-1) = 3$, d'où $\boxed{\Delta : y = 3x + 3}$. De plus $f(x) - (3x + 3) = -(x + 1)^3$: $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de Δ sur $]-\infty ; -1[$ et en dessous sur $]-1 ; +\infty[$.

3) & 4) • $g(-2 - x) = |-x - 1|(-(-2 - x)^2 - 2(-2 - x) + 2) + 1 = |x + 1|(-x^2 - 2x + 2) + 1 = g(x)$: la droite $x = -1$ est axe de symétrie de $(\mathscr{C}_g)$.

• Pour $x \geq -1$, $g(x) = (x + 1)(-x^2 - 2x + 2) + 1 = -x^3 - 3x^2 + 3 = f(x) + 1$: on trace $(\mathscr{C}_g)$ sur $[-1 ; +\infty[$ en translatant la partie de $(\mathscr{C}_f)$ $(x \geq -1)$ de vecteur $\vec{j}$, puis on complète par symétrie orthogonale d'axe $x = -1$.

Exercice 2 : Lecture graphique (4 points)

4 pts

1) • En 1, tangente horizontale : $\boxed{f'(1) = 0}$. • En 3, demi-tangente horizontale à gauche : $\boxed{f'_g(3) = 0}$.

• En 3, demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite ($f(3) = -2$) : $\boxed{\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{f(x) + 2}{x - 3} = +\infty}$.

2) D_1 passe par $(0 ; 2)$ et $(2 ; 0)$: $\boxed{D_1 : y = -x + 2}$; et $\boxed{D_2 : x = 2}$.

3) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1}$; $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x) = 2}$; $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0}$.

4) $f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; 1]$ (s'annulant en 1) et $f'(x) \geq 0$ sur $]2 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ (s'annulant à gauche en 3).

Exercice 3 : Nombres complexes et trigonométrie (5 points)

5 pts

1) b) $AB^2 = |(-1 + i\sqrt{3}) - (-1 - i)|^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$; $AC^2 = (\sqrt{3} + 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$; $BC^2 = |(\sqrt{3} + 1) - i(\sqrt{3} + 1)|^2 = 2(\sqrt{3} + 1)^2 = AB^2 + AC^2$: ABC est rectangle isocèle en A.

2) $z_A{}^2 = (-1 - i)^2 = \boxed{2i}$ et $\dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{(-1 - i)(-1 - i\sqrt{3})}{4} = \boxed{\dfrac{1 - \sqrt{3}}{4} + i\dfrac{1 + \sqrt{3}}{4}}$.

3) a), b) & c) $z_A = \sqrt{2}[\dfrac{5\pi}{4}]$; $z_B = 2[\dfrac{2\pi}{3}]$; $z_C = 2[-\dfrac{\pi}{6}]$. Ainsi $\dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}[\dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{2\pi}{3}] = \dfrac{\sqrt{2}}{2}[\dfrac{7\pi}{12}]$. Par identification : et . • et : est l'image de par la rotation de centre et d'angle . • : ; : .

apcpedagogie.com

$\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$ $\boxed{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

4) & 5) $OB = |z_B| = 2 = |z_C| = OC$ $(\overrightarrow{OC}\,;\,\overrightarrow{OB}) \equiv \arg(z_B) - \arg(z_C) \equiv \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \equiv \boxed{\frac{5\pi}{6}}$ $BCO\,\frac{5\pi}{6}$

$E = \{M \mid AM = 2\}$ **cercle de centre A et de rayon 2** $F = \{M \mid |i(z+1-i\sqrt{3})| = 2\} = \{M \mid BM = 2\}$ **cercle de centre B et de rayon 2**

Exercice 4 : Géométrie complexe (5 points)

5 pts

1) b) $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2i+4+2i}{2} = 2 = z_I$, donc I est le milieu de $[AC]$.

2) a) & b) $u = z_A - z_B = \boxed{-1-3i}$ et $u' = z_C - z_B = \boxed{3+i}$. On a $BA = |u| = \sqrt{10}$ et $BC = |u'| = \sqrt{10}$, donc ABC est isocèle en B.

3) a) & b) $z_D = 2z_I - z_B = 4 - (1+i) = \boxed{3-i}$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu I ($ABCD$ parallélogramme) et $BA = BC$, donc $ABCD$ est un **losange**.

4) • $\Delta = \{M \mid IM = AM\}$: **médiatrice du segment $[IA]$** ;

• $\Delta' = \{M \mid |i(z-1-i)| = |z - z_C|\} = \{M \mid BM = CM\}$: **médiatrice du segment $[BC]$** ;

• $\mathscr{C} = \{M \mid 2|z+2i| = 4\} = \{M \mid AM = 2\}$: **cercle de centre A et de rayon 2**.

apcpedagogie.com