Année scolaire : 2026 – 2027

# CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques | Classe : 3ème Sciences Techniques | Barème : 20 points

## Exercice 1 : QCM (4 points)

4 pts

**1.** **$y = 2(x-1)$** — Car $\lim\limits_{x\to\infty}\,[f(x) - (2x-2)] = \lim\limits_{x\to\infty}\,(1 - \dfrac{x^2+2}{x^2-x+2}) = 1 - 1 = 0$.

**2.** **$\dfrac{5\pi}{3}$** — $\arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $\arg(z^{2017}) \equiv -2017\ \dfrac{\pi}{3} \equiv -672\pi - \dfrac{\pi}{3} \equiv \dfrac{5\pi}{3}\ [2\pi]$.

**3.** **une droite** — En posant $z = x + iy$, $|x - i(y+2)| = |x + i(y-2)| \Leftrightarrow (y+2)^2 = (y-2)^2 \Leftrightarrow y = 0$ (axe des abscisses).

**4.** **$x = -2$** — $f''(x) = 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (s'annule en changeant de signe).

## Exercice 2 : Nombres complexes (5 points)

5 pts

**1. a) & c)** $OF = |z_F| = \sqrt{3+1} = 2$ : $F \in \mathscr{C}_{(O,\,2)}$. De plus $AE^2 = 9$, $EF^2 = (2+\sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ et $AF^2 = (2+\sqrt{3})^2 + 9 = 16 + 4\sqrt{3} = AE^2 + EF^2$ : $AEF$ est **rectangle en $E$**.

**2. a), b) & c)** $\dfrac{z_F}{z_A} = \dfrac{(\sqrt{3}-i)(-2-2i)}{8} = \dfrac{-\sqrt{3}-1}{4} + i\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$. Par ailleurs $z_F = [2\ ;\ -\dfrac{\pi}{6}]$ et $z_A = [2\sqrt{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}]$, donc $\dfrac{z_F}{z_A} = [\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\dfrac{11\pi}{12}]$. D'où **$\cos(\dfrac{11\pi}{12}) = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$** et **$\sin(\dfrac{11\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$**.

**3. a) & b)** ED = AF $\Rightarrow z_D = z_E + z_F - z_A =$ **$\sqrt{3} - 4i$**. Ainsi $E = \{M \mid \arg(z - z_D) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\}$ : c'est la **droite passant par $D$ et parallèle à l'axe $(O, \mathbf{v})$ (d'équation $x = \sqrt{3}$), privée du point $D$**.

## Exercice 3 : Suites réelles (5 points)

5 pts

**1.** • $U_n = 2^n$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, donc $(U_n)$ est divergente. • $V_0 = 0$, $V_1 = 1$, $V_2 = 4$ : $V_1 - V_0 \neq V_2 - V_1$ et $V_0 = 0$ donc $(V_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

• Par récurrence : $V_1 = 1 > 0$ et si $V_n > 0$, $V_{n+1} = 2V_n + 2^n > 0$. De plus $V_{n+1} - V_n = V_n + 2^n > 0$ : $(V_n)$ est strictement croissante. • Par récurrence : $V_0 = 0$ et si $V_n = n\,2^{n-1}$, $V_{n+1} = 2(n\,2^{n-1}) + 2^n = (n+1)2^n$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ ($V$ diverge).

**2.** $W_{n+1} - W_n = \dfrac{2V_n + U_n}{2U_n} - \dfrac{V_n}{U_n} =$ **$\dfrac{1}{2}$** : $W$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $W_0 = 0$, donc $W_n = \dfrac{n}{2}$ et $V_n = W_n U_n = n\,2^{n-1}$.

apcpedagogie.com

## Exercice 4 : Étude de fonctions (6 points)

6 pts

**1.** $g'(x) = 2x - 4$ ($g$ décroissante sur $]-\infty\,;\,2]$, croissante sur $[2\,;\,+\infty[$, minimum $g(2) = -9$ ; branches paraboliques de direction $(Oy)$ en $\pm\infty$ ; $g(4-x) = g(x)$ donc $x = 2$ axe de symétrie).

**2. & 3.** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ : $x = 2$ est asymptote verticale. $f'(x) = \dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2} = \dfrac{g(x)}{(2-x)^2}$ ($f(-1) = -1, f(5) = 11$).

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | **$-1$** | $\searrow$ | $-\infty$ | $+\infty\ \searrow$ | **$11$** | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**4., 5. & 6.** $f(x) = \dfrac{9}{x-2} + x + 3$ : $\Delta'$ : $y = x + 3$ est asymptote oblique ($\mathscr{C}_f$ sous $\Delta'$ sur $]-\infty\,;\,2[$, au-dessus sur $]2\,;\,+\infty[$) et $f(4-x) + f(x) = 10 \Rightarrow I(2, 5)$ centre de symétrie. Discussion $f(x) = m$ : **2 solutions** si $m \in ]-\infty\,;\,-1[ \cup ]11\,;\,+\infty[$ ; **1 solution** si $m \in \{-1, 11\}$ ; **0 solution** si $m \in ]-1\,;\,11[$.

apcpedagogie.com