Année scolaire : 2026 – 2027

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques | Classe : 3ème Sciences Techniques | Barème : 20 points

EXERCICE N° 1 : Optimisation géométrique (3.5 points)

3.5 pts

1) a) & b) Longueur totale du fil : $\pi x + 2x + 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = 1 - x(\pi + 2) \Leftrightarrow \boxed{y = \dfrac{1 - x(\pi + 2)}{2}}$.

Comme $x > 0$ et $y > 0$, on a $1 - x(\pi + 2) > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{\pi + 2}$, d'où $x \in \left]0 ; \dfrac{1}{\pi + 2}\right[$.

2) a) & b) $S(x) = xy = -\dfrac{\pi + 2}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$ et $S'(x) = -(\pi + 2)x + \dfrac{1}{2}$: S est strictement croissante sur $\left]0 ; \dfrac{1}{2(\pi + 2)}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2(\pi + 2)} ; \dfrac{1}{\pi + 2}\right[$. La surface est maximale pour $\boxed{x = \dfrac{1}{2(\pi + 2)} \text{ m}}$.

EXERCICE N° 2 : Dénombrement (5.5 points)

5.5 pts

I) 1) & 2) Tirages simultanés ($C_{10}^{\,3} = 120$) : $\text{card}(A) = C_5^{\,3} + C_3^{\,3} = 10 + 1 = \boxed{11}$; $\text{card}(B) = C_5^{\,1} \times C_3^{\,1} \times C_2^{\,1} = \boxed{30}$; $\text{card}(C) = 120 - (11 + 30) = \boxed{79}$; $\text{card}(D) = C_{10}^{\,3} - C_8^{\,3} = 120 - 56 = \boxed{64}$.

• $C \cap D$ (2 chapitres dont dénombrement) : $\text{card}(C \cap D) = C_2^{\,2} \times C_8^{\,1} + C_2^{\,1} \times (C_5^{\,2} + C_3^{\,2}) = 8 + 2 \times 13 = \boxed{34}$; $\text{card}(C \cup D) = 79 + 64 - 34 = \boxed{109}$.

II) 1) & 2) Tirages successifs sans remise ($A_{10}^{\,3} = 720$) : $\text{card}(E) = A_5^{\,3} = \boxed{60}$; $\text{card}(F) = 720 - 60 = \boxed{660}$; $\text{card}(G) = 3 \times A_9^{\,2} = 3 \times 72 = \boxed{216}$.

• Évènement H (1 difficile et 1 analyse parmi 3 analyse diff., 2 analyse fac., 2 géom. diff., 1 géom. fac., 2 dénomb. fac.) : soit (1 analyse diff. + 2 non-analyse fac.), soit (1 analyse fac. + 1 géom. diff. + 1 non-analyse fac.), d'où $\text{card}(H) = 3! \times [C_3^{\,1}C_3^{\,2} + C_2^{\,1}C_2^{\,1}C_3^{\,1}] = 6 \times (9 + 12) = \boxed{126}$.

EXERCICE N° 3 : Suites numériques (4.5 points)

4.5 pts

1) a) & b) $U_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}U_n$: suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $U_0 = 1$.

Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0}$.

2) & 3) • Par récurrence : $V_0 = 2 > 1$; si $V_n > 1$, $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n + \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$. • $V_{n+1} - V_n = -\dfrac{1}{2}V_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(1 - V_n) < 0$: (V_n) est **strictement décroissante**.

• Par récurrence : $V_0 = 2 = 1 + U_0$ et si $V_n = 1 + U_n$, $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 + U_n) + \dfrac{1}{2} = 1 + U_{n+1}$. D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 1}$.

apcpedagogie.com

EXERCICE N° 4 : Équation dans ℂ et géométrie (6.5 points)

6.5 pts

A) 1) & 2) $Z^2 = -3 \Leftrightarrow Z = \pm i\sqrt{3}$. Comme $(Z-1)^2 = Z^2 - 2Z + 1$, $Z^2 - 2Z + 4 = 0 \Leftrightarrow (Z-1)^2 = -3 \Leftrightarrow Z = 1 \pm i\sqrt{3}$. Ainsi $S_E =$ $\boxed{\{-2\ ;\ 1 + i\sqrt{3}\ ;\ 1 - i\sqrt{3}\}}$.

B) 1) & 2) $Z_A = [2\ ;\ \frac{\pi}{3}]$, $Z_B = [2\ ;\ -\frac{\pi}{3}]$, $Z_C = [2\ ;\ \pi]$: $OA = OB = OC = 2 \Rightarrow A, B, C \in (\mathscr{C})$.

• $AB = AC = BC =$ $\boxed{2\sqrt{3}}$: ABC est **équilatéral**. $ABDC$ parallélogramme ($AB = AC$ donc losange) $\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow Z_D = Z_B + Z_C - Z_A =$ $\boxed{-2 - 2i\sqrt{3}}$.

3) $\arg(\frac{Z^2}{Z_A}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \Leftrightarrow 2\arg(Z) - \frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg(Z) \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$: (Γ) est la **droite (OA) privée du point O**.

apcpedagogie.com