CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques — Classe : 3ème Mathématiques — Barème : 20 points

Exercice n°1 : (7 points)

3,5 pts

A/ 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} =$ **0** : la droite des abscisses ($y = 0$) est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) Comme $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$, on a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ (donc f n'admet pas de limite en 0) et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) =$ **$+\infty$**. Les droites d'équations $x = 0$ et $x = -1$ (ainsi que $x = -2$) sont des asymptotes verticales à $\mathscr{C}_f$.

3) Pour tout $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$, on a $-2 - x \in D_f$ et $f(-2-x) + f(x) = \frac{1}{(-2-x)(-1-x)(-x)} + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = 0$: ainsi **$I(-1\ ;\ 0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$**.

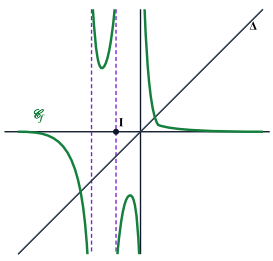
4) Sur D_f, $f'(x) = -\frac{3x^2+6x+2}{(x^3+3x^2+2x)^2}$. Le trinôme $3x^2 + 6x + 2$ s'annule en $x_1 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ (avec $f(x_2) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}60$). Sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$, f est strictement croissante sur $]-1\ ;\ -1+\frac{\sqrt{3}}{3}]$ et strictement décroissante sur $[-1+\frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.

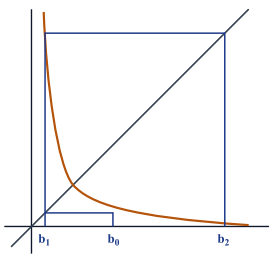
5) & 6) La fonction $h(x) = f(x) - x$ est continue et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}\ ;\ 1]$; comme $h(\frac{1}{2}) = \frac{8}{15} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30} > 0$ et $h(1) = \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6} < 0$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]\frac{1}{2}\ ;\ 1[$. Comme $h(0{,}51) \approx 0{,}007$ et $h(0{,}52) \approx -0{,}018$, **$\alpha \approx 0{,}51$** à 10^{-2} près.

3,5 pts

B/ 1) & 2) Sur $]0\ ;\ +\infty[$, f est décroissante et positive : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < n < n+1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ et $a_n > 0$, donc (a_n) est décroissante et minorée par 0, d'où **(a_n) converge**. Pour S_n : $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante. Par réduction au même dénominateur, $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; par somme télescopique, $S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\times2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] =$ **$\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)(n+1)}$**. Ainsi $\frac{1}{6} \le S_n < \frac{1}{4}$ ((S_n) bornée) et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n =$ **$\frac{1}{4}$**.

3) $b_0 = 1$, $b_1 = f(1) = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$, $b_2 = f(\frac{1}{6}) = \frac{216}{91} \approx 2{,}37$: on a $b_1 < b_0 < b_2$, donc (b_n) n'est **pas monotone** ; graphiquement, l'escalier s'écarte de α, on conjecture que (b_n) est **divergente**.





apcpedagogie.com

Exercice n°2 : (4 points)

4 pts

1) • Pour $n = 0$: $2^4 + 3^1 = 19$, divisible par 19.

• Hérédité : si $2^{3n+4} + 3^{3n+1} = 19k$ ($k \in \mathbb{N}$), alors $2^{3n+7} + 3^{3n+4} = 8 \times 2^{3n+4} + 27 \times 3^{3n+1} = 8(2^{3n+4} + 3^{3n+1}) + 19 \times 3^{3n+1} = 19(8k + 3^{3n+1})$, divisible par 19.

2) On a $9a + 5b = 17(a + b) - 4(2a + 3b)$ et $2a + 3b = 4(9a + 5b) - 17(2a + b)$; par combinaisons linéaires, $17 \mid (2a + 3b) \Leftrightarrow 17 \mid (9a + 5b)$.

3) $2x^3 + xy - 7 = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + y) = 7$. Comme 7 est premier et $x, y \in \mathbb{N}$: soit $x = 1$ et $2 + y = 7 \Rightarrow y = 5$; soit $x = 7$ et $98 + y = 1$ (impossible). D'où **$S_{\mathbb{N}^2} = \{(1, 5)\}$**.

4) Posons $d = p \wedge q$ ($d > 1$ car non premiers entre eux) et $m = p \vee q$. Comme $d \mid m$ et $11d + m = 203 = 7 \times 29$, $d \mid 203$ donc $d \in \{7, 29, 203\}$. Or $11d < 203 \Rightarrow d \leq 18$, donc $d = 7$ et $m = 203 - 77 = 126$. En écrivant $p = 7p'$, $q = 7q'$ avec $p' \wedge q' = 1$ et $p' < q'$, il vient $p'q' = 18$, soit $(p', q') \in \{(1, 18), (2, 9)\}$, d'où **$(p, q) \in \{(7, 126), (14, 63)\}$**.

Exercice n°3 : (4 points)

4 pts

A) Effectif : 10 femmes et 16 hommes.

1) Nombre total de comités : $C_{26}^{\ 4} =$ **14 950**.

2) a/ Au moins deux femmes : $C_{26}^{\ 4} - (C_{16}^{\ 4} + C_{16}^{\ 3} \times C_{10}^{\ 1}) = 14\,950 - (1\,820 + 5\,600) =$ **7 530**.

b/ Au plus un homme (0 ou 1 homme) : $C_{16}^{\ 0} \times C_{10}^{\ 4} + C_{16}^{\ 1} \times C_{10}^{\ 3} = 210 + 1\,920 =$ **2 130**.

c/ Mme X et M. Y ne siègent pas ensemble : $C_{26}^{\ 4} - C_{24}^{\ 2} = 14\,950 - 276 =$ **14 674**.

B) 1) Nombre total de bureaux : $A_{26}^{\ 4} =$ **358 800**.

2) a/ Secrétaire femme : $C_{10}^{\ 1} \times A_{25}^{\ 3} =$ **138 000**. **b/** Président homme et secrétaire femme : $C_{16}^{\ 1} \times C_{10}^{\ 1} \times A_{24}^{\ 2} =$ **88 320**.

c/ Les deux sexes figurent : $A_{26}^{\ 4} - (A_{16}^{\ 4} + A_{10}^{\ 4}) = 358\,800 - (43\,680 + 5\,040) =$ **310 080**.

d/ Vice-président et trésorier de même sexe : $(A_{16}^{\ 2} + A_{10}^{\ 2}) \times A_{24}^{\ 2} = (240 + 90) \times 552 =$ **182 160**.

e/ Mme X et M. Y ne siègent pas ensemble : $A_{26}^{\ 4} - A_4^{\ 2} \times A_{24}^{\ 2} = 358\,800 - 12 \times 552 =$ **352 176**.

Exercice n°4 : (5 points)

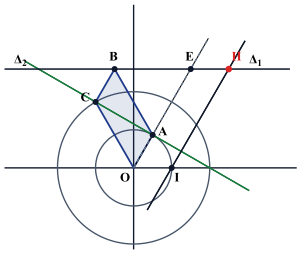
5 pts

1) a-, b- & c- $z_A =$ **$\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})$** et $z_C =$ **$2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}))$**. Ainsi $OA = |z_A| = 1 \Rightarrow A \in (\mathscr{C}_1)$ et $OC = |z_C| = 2 \Rightarrow C \in (\mathscr{C}_2)$. De plus, $\arg(z_A^{2025}) \equiv 2025 \times \frac{\pi}{3} = 675\pi \equiv \pi\ [2\pi]$ et $\arg(z_C^{2025}) \equiv 2025 \times \frac{2\pi}{3} = 1350\pi \equiv 0\ [2\pi]$: $z_A^{2025} = -1$ et $z_C^{2025} = 2^{2025}$ sont réels, donc leur somme est **réelle**.

2) & 3) $\vec{z_{IA}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\vec{z_{IB}} = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\vec{z_{IA}}$: I, A, B sont alignés ($B \in \Delta$). On a $z_A + z_C = \frac{-1 + i3\sqrt{3}}{2} = z_B$ avec O, A, C non alignés : $OABC$ est un **parallélogramme**. Enfin $AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}|^2 = 3$; comme $OA^2 + AC^2 = 1 + 3 = 4 = OC^2$, $(OA) \perp (AC)$ en $A \in (\mathscr{C}_1)$, donc (AC) est **tangente à $(\mathscr{C}_1)$**. , d'où (). Comme , ; de plus et et , donc , d'où . Par identification des parties imaginaires : , d'où et . Enfin et : , donc est .

apcpedagogie.com

4) $H \in \Delta_2 \Rightarrow \text{Im}(z_H) = \text{Im}(z_B) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $z_H = x + i\frac{3\sqrt{3}}{2} x \in \mathbb{R} \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{IH} |z_E| = IH (IH) \perp (AC) (OA) \perp (AC) \Rightarrow$ $(OE) \parallel (OA) \text{Im}(z_E) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \arg(z_E) \equiv \arg(z_A) \equiv \frac{\pi}{3}$ $[2\pi] z_E = IH(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})) IH \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow IH = 3z_E = \frac{3 + i3\sqrt{3}}{2} z_H = z_I + z_E = \boxed{\frac{\mathbf{5 + i3\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}} IB = |-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}| = 3BH = |z_H - z_B| = |\frac{5}{2} - (-\frac{1}{2})| = 3IB = IH = BH = 3IBH$ **équilatéral**



apcpedagogie.com