DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques **Classe : 3ème Mathématiques**

Profs : Msekni Mohamed – Zaghdane Hichem – Chelly Moez

Le sujet comporte 4 exercices dont une feuille annexe (Annexes 1 et 2) à rendre avec la copie.

Exercice n°1 : (7 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-2, -1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x^2 + 2x}$ et on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative selon $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Étudier $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et calculer $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Montrer que $I(-1 ; 0)$ est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.

4) Étudier les variations de f sur $]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

5) Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α dans $[\frac{1}{2} ; 1]$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\Delta : y = x$ sur l'annexe 1.

B/ On considère la suite (a_n) définie par $a_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Justifier que (a_n) est décroissante et montrer que (a_n) est convergente.

2) Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a/ Justifier que (S_n) est croissante.

b/ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

c/ Montrer alors que $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+2)(n+1)}$.

d/ Justifier que (S_n) est bornée et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

3) On considère la suite (b_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a/ Construire, sur l'annexe 1, les trois premiers termes de la suite (b_n).

b/ (b_n) est-elle monotone ? Justifier.

c/ Conjecturer la convergence de (b_n).

apcpedagogie.com

Exercice n°2 : (4 points)

Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n+4} + 3^{3n+1}$ est divisible par 19.

2) Montrer que pour tous entiers naturels a et b, 17 divise $2a + 3b$ si et seulement si 17 divise $9a + 5b$.

3) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x, y) vérifiant $2x^3 + xy - 7 = 0$.

4) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (p, q) non premiers entre eux et tels que $p < q$ et $11(p \wedge q) + (p \vee q) = 203$.

Exercice n°3 : (4 points)

A) Un groupe de 26 personnes dont 10 sont des femmes doit élire un comité de 4 personnes.

1) Déterminer tous les cas possibles.

2) Déterminer les cas possibles d'obtenir un comité contenant :

- **a/** Au moins deux femmes.
- **b/** Au plus un homme.
- **c/** Madame X et Monsieur Y ne siègent pas ensemble.

B) Ce groupe de 26 personnes doit élire un bureau composé d'un président, d'un vice-président, d'un trésorier et d'un secrétaire.

1) Déterminer tous les cas possibles.

2) Déterminer les cas possibles d'avoir un bureau tel que :

- **a/** Le poste de secrétaire doit être occupé par une femme.
- **b/** Le président est un homme et le secrétaire est une femme.
- **c/** Les deux sexes figurent dans le bureau.
- **d/** Le vice-président et le trésorier sont de même sexe.
- **e/** Madame X et Monsieur Y ne siègent pas ensemble.

Exercice n°4 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient I, A, B et C les points d'affixes respectives $z_I = 1$, $z_A = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \dfrac{-1 + i3\sqrt{3}}{2}$ et $z_C = -1 + i\sqrt{3}$.

On a représenté, en annexe 2, le cercle $(\mathscr{C}_1)$ de centre O et de rayon 1, le cercle $(\mathscr{C}_2)$ de centre O et de rayon 2 et la droite Δ d'équation : $x = -\dfrac{1}{2}$.

1) **a/** Écrire z_A et z_C sous forme trigonométrique.

b/ Déduire que $A \in (\mathscr{C}_1)$ et $C \in (\mathscr{C}_2)$. Placer les points I, A et C.

c/ Montrer que $(z_A)^{2025} + (z_C)^{2025}$ est réel.

2) **a/** Montrer que les points I, A et B sont alignés. Construire le point B.

b/ Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un parallélogramme.

3) Montrer que la droite (AC) est tangente à $(\mathscr{C}_1)$.

apcpedagogie.com

4) On désigne par Δ_1 la perpendiculaire à la droite (AC) passant par I et par Δ_2 la parallèle à l'axe des réels passant par le point B. Δ_1 et Δ_2 se coupent en un point H. On note z_H l'affixe de H.

a/ Vérifier que $z_H = x + i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ où x est un réel.

b/ Soit E le point tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{IH}$ et z_E son affixe. Montrer que $z_E = IH(\cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3}))$.

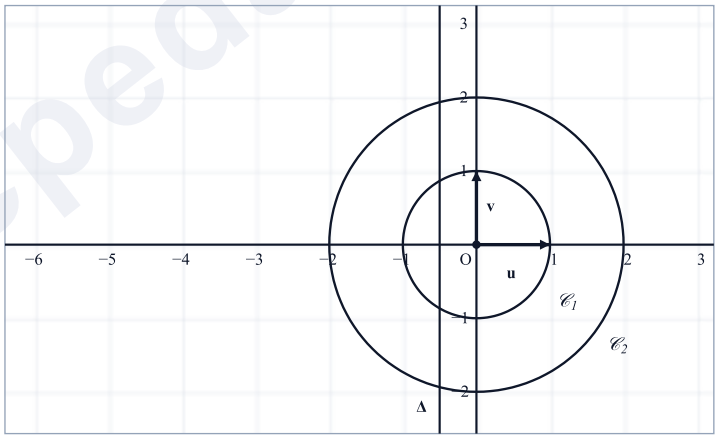
c/ En déduire que $z_H = \dfrac{5 + i3\sqrt{3}}{2}$.

d/ Montrer que le triangle IBH est équilatéral.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE **Nom et prénom : ..... Classe : 3ème M**



Annexe 1 de l'exercice 1



Annexe 2 de l'exercice 4

apcpedagogie.com