Date : 03 / 03 / 2026 — **Année scolaire : 2025 / 2026**

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques — **Niveau : 3ème Année** — **Section : Mathématiques** — **Durée : 3 heures**

Le sujet comporte 4 exercices dont une annexe (Figures 1, 2 et 3) à rendre avec la copie.

Exercice N°1 : (6 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 - i\sqrt{3} = 0$.

a- Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 - i\sqrt{3} = (z - \sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)^2$.

b- Résoudre alors l'équation (E).

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par A, E et F les points d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_E = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + \sqrt{3} + i)$ et $z_F = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 - \sqrt{3} - i)$.

2) **a-** Déterminer l'écriture trigonométrique de z_A.

b- Vérifier que l'affixe du point D milieu du segment $[EF]$ est $z_D = \sqrt{2}$.

c- En déduire que D est le projeté orthogonal du point A sur l'axe des abscisses.

d- Construire les points A et D dans le repère donné en annexe (Figure 1).

3) **a-** Calculer $\vec{OE} \cdot \vec{OF}$ puis en déduire que le triangle OEF est rectangle en O.

b- Construire en justifiant le cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle OEF.

4) Soit B le milieu du segment $[AD]$.

a- Montrer que la droite (BF) est parallèle à l'axe des abscisses.

b- Construire alors F puis E.

5) Soit M un point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que : $(\vec{i}, \vec{OM}) \equiv \theta\ [2\pi]$ où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

a- Montrer que l'affixe du vecteur $\vec{DM}$ est : $\text{aff}(\vec{DM}) = \sqrt{2}[\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)]$.

b- En déduire l'écriture trigonométrique de l'affixe du point M.

Exercice N°2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) **a-** Montrer que f est dérivable à gauche en 1 et que $f_g'(1) = 0$.

b- Étudier la dérivabilité de f à droite en (-1). Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$: $f'(x) = \frac{(x - 1)(2x + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}$.

d- Dresser le tableau de variation de f.

apcpedagogie.com

2) On considère le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de rayon 1 et les points $A(1, 0)$ et $B(-1, 0)$. Soit H le point d'abscisse x du segment $[AB]$ distinct de A et de B. La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe ($\mathscr{C}$) en deux points M et N. On désigne par $\mathscr{A}(x)$ l'aire du triangle AMN.

a- Vérifier que pour tout $x \in]-1, 1[$: $\mathscr{A}(x) = f(x)$.

b- Montrer que si l'aire $\mathscr{A}(x)$ est maximale alors le triangle AMN est équilatéral.

3) On a tracé en annexe (Figure 2), la courbe (C_f). Soit $(E) = (C_f) \cup (C_{-f})$, où (C_{-f}) désigne la courbe représentative de la fonction $(-f)$.

a- Tracer (E) (on précisera sur la figure les tangentes à la courbe (C_f)).

b- Montrer qu'une équation de (E) est $y^2 = (1 - x)^2(1 - x^2)$.

Exercice N°3 : (4 points)

Dans une cage il y a neuf souris de type « Hamster » telles que : **2 femelles rouges**, **3 mâles blancs** et **4 jaunes dont 2 femelles et 2 mâles**.

1) La porte s'ouvre et trois Hamsters sortent simultanément. Dénombrer chacun des événements suivants :
A : « Les trois Hamsters sortis sont de même couleur » ;
B : « Parmi les Hamsters sortis il y a au moins deux mâles » ;
C : « Il ne reste que deux couleurs de souris dans la cage ».

2) On remet les Hamsters sortis dans la cage, la porte reste mal fermée, ainsi trois sortent de nouveau de la cage un par un (sans remise). Dénombrer chacun des cas suivants :
D : « Le triplet de Hamsters sortis est tricolore » ;
E : « Parmi les Hamsters sortis il y a au moins deux de couleur jaune ».

3) Lors du contrôle de la cage le propriétaire s'aperçoit qu'il n'y a plus de Hamsters blancs ; il marque ceux qui restent comme suit : les souris mâles par le numéro 1 et les souris femelles par le numéro 2. Puis il choisit parmi eux successivement une paire de Hamsters en remettant chaque fois la souris dans la cage après avoir noté son numéro. Soit a le numéro marqué sur le premier Hamster choisi et b le numéro marqué sur le second. Déterminer dans chacun des cas suivants le nombre de choix possibles tel que :

a- Les droites d'équations $x = -1$ et $y = 2$ sont les asymptotes à la courbe de la fonction f définie par : $f : x \mapsto \dfrac{ax - 1}{bx + 1}$.

b- L'angle $\dfrac{\pi}{4}$ est un argument du nombre complexe $z = a + ib$.

Exercice N°4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(I)

1) **a-** Montrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

apcpedagogie.com

2) **a-** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b- Étudier la position relative de la courbe (C_f) et de la droite (D).

3) Tracer la courbe (C_f) dans le repère donné en annexe (Figure 3).

(II) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1) **a-** Placer sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite (u_n).

b- Que peut-on conjecturer sur la monotonie et la convergence de (u_n) ?

2) **a-** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$.

b- En déduire que la suite (u_n) est croissante.

3) **a-** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 \geq 1$.

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq \sqrt{n}$. Trouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + u_k}$.

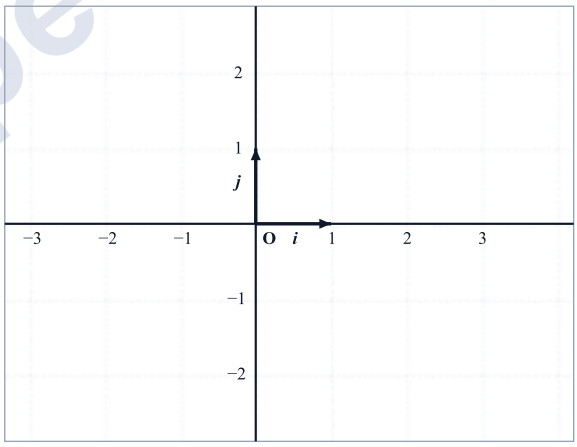
a- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = u_{n+1}$.

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} \geq u_{n+1}$.

c- En déduire alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

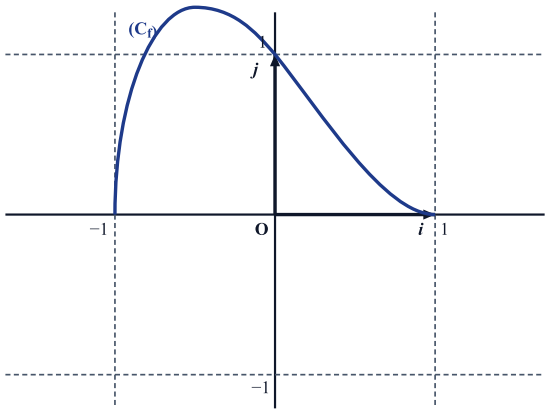
ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE **Nom : ..... Prénom : ..... Classe : 3M N° : .....**

Exercice N°1 — Figure 1 :

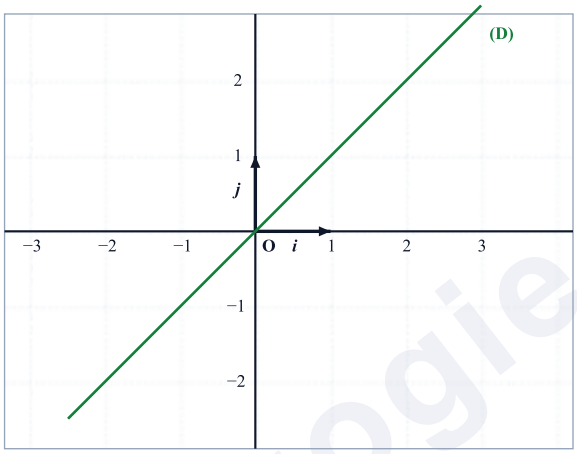


Exercice N°2 — Figure 2 :

apcpedagogie.com



Exercice N°4 — Figure 3 :



apcpedagogie.com