Année scolaire : 2026 – 2027

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques — Classe : 3ème Sciences Techniques — Barème : 20 points

Exercice n°1 : QCM justifié (3 points)

3 pts

1. **b) 7** — En posant $P(x) = x^4 + x^3 - 2$, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{P(x)-P(1)}{x-1} = P'(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 = 7$.

2. **a) $\pi + 2k\pi$** — $\arg\left(\dfrac{z^2}{\overline{z}}\right) \equiv 2\arg(z) - (-\arg(z)) \equiv 3\arg(z) \equiv 3 \times \dfrac{\pi}{3} \equiv \pi\ [2\pi]$.

3. **c) $(AB) \perp (CD)$** — $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} - \vec{AD}) = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{DC} = 0$ (pour $A \neq B$ et $C \neq D$).

Exercice n°2 : Étude de fonctions (7 points)

7 pts

I/ 1., 2. & 3. • $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} =$ **1** : la droite $y = 1$ est asymptote horizontale à (C_g) en $+\infty$ et $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to 1} g(x) =$ **$-\infty$** (numérateur tend vers -1 et dénominateur vers 0^+). • $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$; $g(x) > 0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[\cup]2\ ;\ +\infty[$ et $g(x) < 0$ sur $]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ 2[$.

II/ 1. & 2. • $f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{x-1} \to 0$ en $\pm\infty$: $\Delta : y = x + 1$ est asymptote oblique ; (C_f) est sous Δ sur $]-\infty\ ;\ 1[$ et au-dessus sur $]1\ ;\ +\infty[$.

• $f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = g(x)$, avec $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	**0**	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	**4**	↗	$+\infty$

3. a) & b) $f(3) = \dfrac{9}{2}$ et $f'(3) = \dfrac{3}{4}$: **$T : y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{9}{4}$**. Tangente parallèle à $\Delta \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = (x-1)^2 \Leftrightarrow 0 = 1$ (impossible) : **aucun point**.

Exercice n°3 : Nombres complexes (6 points)

6 pts

1. & 2. $z_A = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$ et $z_B = \sqrt{2}(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4}))$, donc $\dfrac{z_A}{z_B} = \sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12})$.

Forme algébrique : $\dfrac{z_A}{z_B} = \dfrac{(1+i\sqrt{3})(1+i)}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. D'où **$\sin(\dfrac{7\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$**.

3. & 4. • $z_{AB} = -i(1+\sqrt{3})$ et $z_{AC} = -3$: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, donc ABC est rectangle en A. $ABDC$ rectangle $\Leftrightarrow \vec{BD} = \vec{AC} \Leftrightarrow z_D = z_B + z_C - z_A =$ **$-2 - i$**.

• $\left|\dfrac{\overline{z}}{z-1+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z| = |z - z_B| \Leftrightarrow OM = BM$: l'ensemble est la **médiatrice du segment [OB]**.

Exercice n°4 : Produit scalaire et lignes de niveau (4 points)

4 pts

1. $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 3\times 3\times\cos(\frac{\pi}{3}) = \boxed{\frac{9}{2}}$; $\vec{IA}\cdot\vec{IC} = \boxed{0}$ (car $(AI)\perp(BC)$) ; $\vec{IB}\cdot\vec{IC} = -IB^2 = \boxed{-\frac{9}{4}}$.

2. $\vec{AJ}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AD}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}(2\vec{AB}-\vec{AC})\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot\vec{AC} - \frac{1}{2}AC^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = \boxed{0}$.

3. • $AC^2 - 2AB^2 = 9 - 18 = -9 \Rightarrow A\in(E)$. • $\vec{DC} - 2\vec{DB} = \vec{DC} - 2(\frac{1}{2}\vec{DC}) = \vec{0}$: D barycentre de $(C, 1)$ et $(B, -2)$.

• $MC^2 - 2MB^2 = -MD^2 + (DC^2 - 2DB^2) = -MD^2 + 18 = -9 \Leftrightarrow MD^2 = 27 \Leftrightarrow MD = 3\sqrt{3}$: (E) est le **cercle de centre *D* et de rayon $3\sqrt{3}$** (passant par A).

apcpedagogie.com