Devoir de synthèse n°3	AS : 2015/2016
(2ième science 2)	Durée: 2h

Exercice n°1 : (8 points)

Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 + 2x$ et soit C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) 1) Identifier et tracer C_f.

2) Déterminer par calculs les abscisses des points d'intersections de C_f avec l'axe des abscisses.

3) Dresser graphiquement le tableau de signe de f(x).

B) Soit la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de g.

2) Identifier et tracer la courbe de g dans le même repère.

3) Dresser graphiquement le tableau de variation de g.

4) Déterminer par calcul les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g.

5) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

C) Soit la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2|x|}{|x|+1}$

1) Déterminer l' ensemble de définition de h

2) a) Montrer que h est paire

b) Monter que pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a h(x) = g(x)

3) Tracer dans le même repère la courbe de h.

Exercice n°2 : (6 points)

Le plan est munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.Soit les points A (1,3) , B (4,2) , C(4,0) et E(0,-2)et la droite D : 2x – y -8 = 0

1) On donne l'ensemble (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

a) Montrer que (C) est un cercle de centre I (2,1) et dont on précisera le rayon.

b) Montrer que D et (C) sont tangents puis vérifier que C est leur point de contact.

2) a)Monter que [OB] est un diamètre de (C).

b) Vérifier que A appartient au cercle (C) .

c) Calculer Cos $\widehat{AOB}$ puis déduire que OAB est rectangle et isocèle en A.

3) a) Montrer que (EB) : x- y -2 =0

b) Etudier la position relative de (EB) et (C).

b) Montrer que D et (EB) sont sécantes en un point F dont on déterminera les coordonnés.

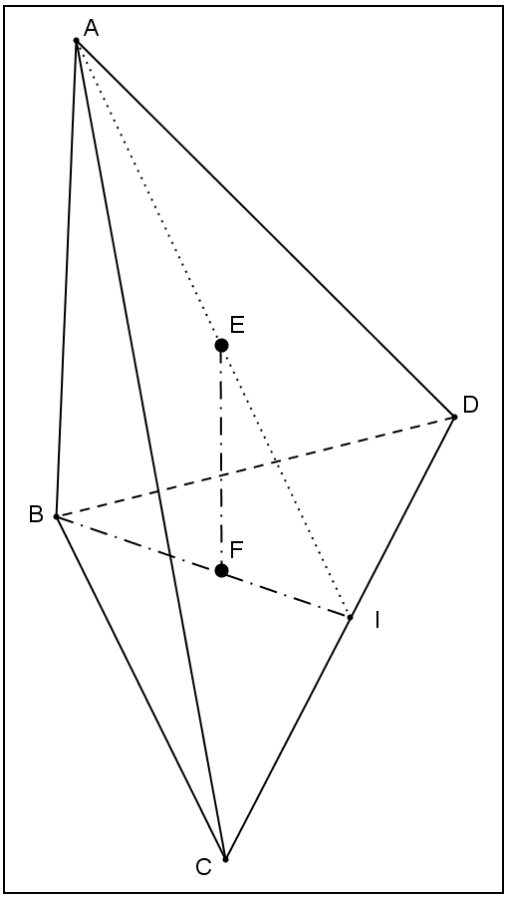
4) a)Calculer d(I, (EB))

b) Déduire que (EB) et (C) sont sécantes en deux points B et un autre point M dont on déterminera les coordonnés

Exercice n°3 : (6 points)

Dans l'espace on considère un tétraèdre ABCD tel que les faces BAC et BDA sont des triangles rectangles et isocèles en B et la face ACD est un triangle équilatéral.
Soit I le milieu du segment [CD] et le point E centre du gravité du triangle ACD et soit F le projeté orthogonal de E sur le plan (BCD).

1) a) Montrer que BC =BD
   b) Déduire que (ABI) est le plan médiateur du segment [CD].
   c) Montrer que (AB) est perpendiculaire au plan (BCD).
   d) Déduire que les plans (ABI) et (ACD) sont perpendiculaires.
2) a) Montrer que (BE) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ACD.
   b) Déduire que BEI est un triangle rectangle en E.
3) a) Vérifier que (BI) la droite d'intersection des plans (ABI) et (BCD).
   b) Déduire que B, F et I sont alignés.

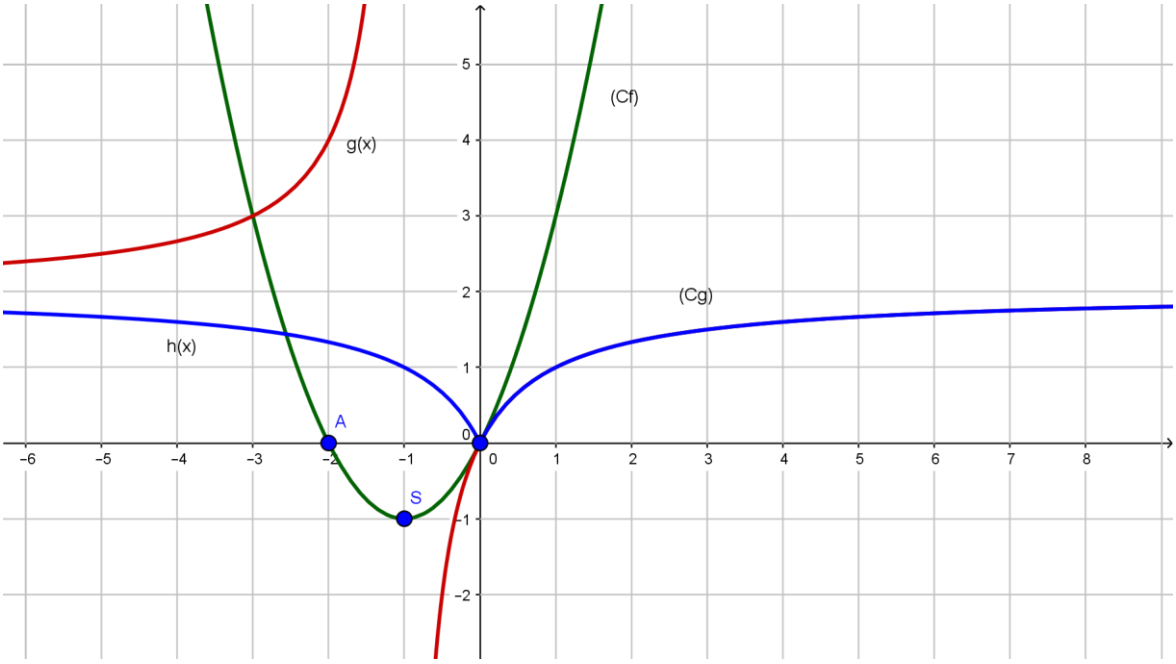


Bon travail

Correction (proposée par le prof :Guesmi.B)

EXERCICE1

A)1)C_f *est une parabole*



2)$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = -2 \ \Rightarrow O(0,0) et\ A(-2;0)$

3) $a\ et\ b\ deux\ reels\ supposons\ que\ a < b \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow f(a) - f(b) = a^2 - b^2 + 2(a-b) = (a-b)(a+b+2) \Rightarrow T = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = a + b + 2$

$1ère\ cas: a \leq -1\ et b \leq -1 \Rightarrow T \leq 0 \Rightarrow f\ est\ decroissante \ \Rightarrow$
$2ème\ cas\ croissante\ sur\ [-1, +\infty[$

Qui est vrai graphiquement

$f(x) \geq 0\ \forall x \in]-\infty - 1[\cup [0, +\infty[\ \ et\ f(x) \leq 0\ si\ x \in]-1,0]$

B)

$1) D_g = IR - \{-1\}$

$2) la\ courbe\ de\ g\ est\ une\ hyperbole$

$3) g\ est\ toujours\ croissante\ sur\ D_g$

$4) f(x) = g(x) \Leftrightarrow x(x+2)(x+1) = 2x \Leftrightarrow x(x^2+3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou$

$x = -3\ ; O(0,0) et\ B(-3,3)\ car\ f(0) = g(0) = 0\ et\ f(-3) = g(-3) = 3$

$5) f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty,-3] \cup [0,+\infty[$

C)

$1)a) D_h = IR \ \ car\ |x|+1 \neq 0\ pour\ tout\ reel\ x$

$b) x \in IR\ alors - x \in IR\ et\ h(-x) = \frac{2|-x|}{|-x|+1} = \frac{2|x|}{|x|+1} = h(x)\ donc\ h\ est\ paire$

$2) si\ x \geq 0\ alors\ |x| = x \Rightarrow h(x) = \frac{2x}{x+1} = g(x)$

3)voir figure

EXERCICE2

$\mathbf{1})a)\ C: (x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}^2\ \ c'est\ l'équation\ d'un\ cercle\ de\ centre\ I(2,1) et\ de\ rayon\ R = \sqrt{5}$

$b) d(I,D) = \frac{|2\times 2-1-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = R\ donc\ \ D\ est\ tangente\ au\ cercle\ C\ \ ; on\ a : 2\times 4 - 0 - 8 = 0\ donc\ \ C \in (D)\ et\ (4-2)^2 + (0-1)^2 = \sqrt{5}^2\ \ donc\ \ C \in (C)\ \ alors\ D\ et\ (C) sont\ tangents\ \ en\ C$

2)a)

On verifie que O et B sont deux points de (C)

$OB = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{4} = 2R$

$b) on\ a : (1-2)^2 + (3-1)^2 = \sqrt{5}^2\ \ donc\ A \in (C)$

$c)\ [OB]\ est\ le\ diametre\ de\ (C) et\ A \in (C)\ donc\ le\ triangle\ OAB\ est\ rectangle\ en\ A\ d'ou \cos(\widehat{AOB}) = \frac{OA}{OB} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}\ et\ puisque\ OAB\ est\ rectangle\ en\ A\ donc\ \widehat{ABO} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow AB = AO$

3)a)

$toujours\ on\ demontre\ en\ utilisant\ des\ methodes\ simples\ on\ a\ une\ equation\ d'une\ droite\ \Delta: x - y - 2 = 0\ \Rightarrow 0 - (-2) + 2 = 0 \Rightarrow E \in\ \Delta\ de\ meme\ 4 - 2 - 2 = 0\ donc\ B \in \Delta \Rightarrow \Delta = (EB)$

$b) on\ a : y = x - 2\ et\ y = 2x - 8 \Rightarrow 2x - 8 = x - 2 \Rightarrow x = 6\ et\ y = 4\ \ donc$

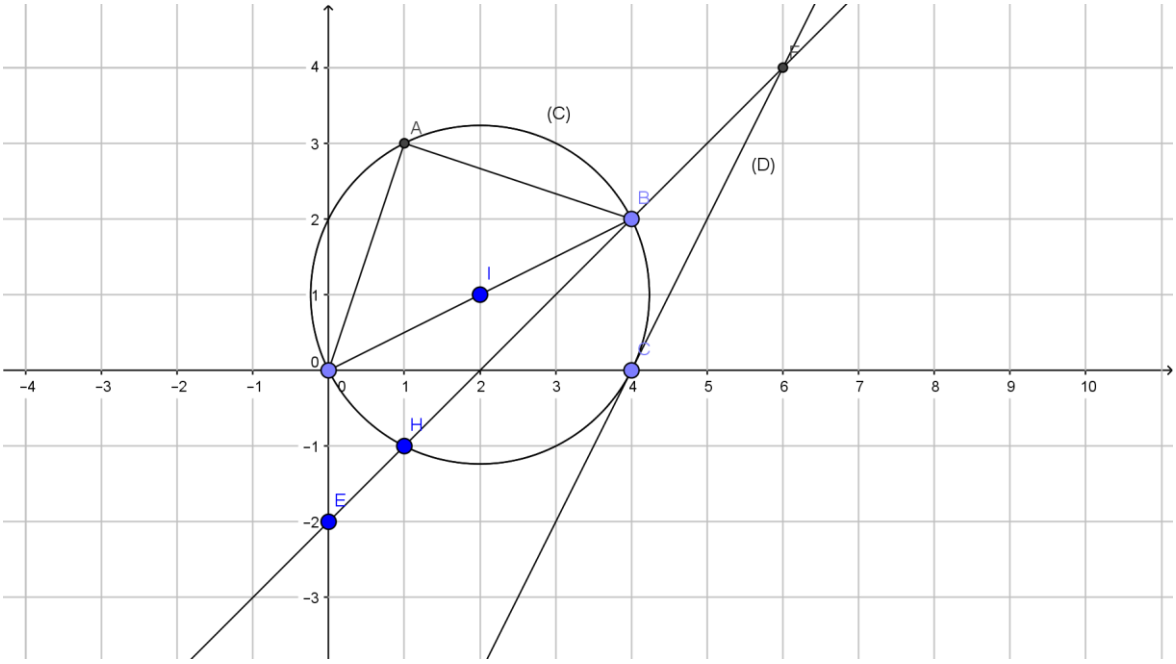
$(EB) \cap D = \{F\}\ ; F(6,4)$

$4)a) d\big(I;(EB)\big) = \frac{|2-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < R \; donc \; (EB) coupe \; (C) en \; deux \; points \; H \; et \; K$

si on veut les determiner on a: $y = x - 2 \; et \; (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \;\; \Rightarrow$

$2y^2 - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \;\; ; a - b + c = 0 \Rightarrow y = -1 \; ou \; y = 2 \; donc \; x = 1 ou \; x = 4$

M(1,-1) et K(4,2)=B



EXERCICE3

1)a)

les deux triangles BAC et BAD sont isometriques $\Rightarrow$ BC = BD

b)$on \; a: BC = BD \;\; \Rightarrow B \in media[CD] \; ; IC = ID \;\; \Rightarrow I \in media[CD] \; , AD = AC \;\; \Rightarrow$

$A \in media[CD] \Rightarrow (IBA) est \; le \; plan \; mediateur \; de \; [CD]$

c)$(AB) \perp (BC) \; et \; (AB) \perp (BD) \Rightarrow (AB) \perp (BCD)$

d)$(ABI)est\ le\ plan\ mediateur\ de\ [CD] \Rightarrow (CD) \perp (ABI) or\ ACD\ est\ equilateral\ \Rightarrow$

$(AI) \perp (CD) \in (ACD) \quad \Rightarrow (ABI) \perp (ACD)\ car\ (ACD) \cap (ABI) = (AB)$

2)a)$(BE) \in (ABI) mais (ABI) \perp (ACD) \Rightarrow (BE) \perp (ACD)\ ; BA = BC = BD \Rightarrow B \in$
$\Delta(axe\ du\ cercle\ (ACD)\ ; on\ a : ACD\ est\ equilateral\ \Rightarrow$
$le\ centre\ de\ gravite\ est\ le\ meme\ que\ l'orthocentre\ le\ meme\ que\ le\ centre\ du\ cercle\ circonscrit\ \Rightarrow$
$EA = EC = ED \Rightarrow E \in \Delta \Rightarrow \Delta = (EB)$

b)$(BE) est\ l'axe\ du\ cercle\ (ACD) \Rightarrow (BE) \perp (ACD)\ or\ \ (EI) \in (ACD) \Rightarrow (BE) \perp (EI) \ \Rightarrow$
$(EBI)\ est\ rectangle\ en\ E$

3)a) (BI)∈(BCD) et (BI)∈(ABI)

b)B est le projete orthogonal de A sur (BCD)

I est propre projete orthogonal sur (BCD)

F est.....deE sur (BCD)

A,E et I sont alignes donc B ;F et I sont alignes