CORRECTION DU DEVOIR DE CONTRÔLE N°2

Épreuve : Mathématiques | Classe : 3ème Mathématiques | Barème : 20 points

Exercice N°1 : (5 pts)

3 pts

1/ a) Équation $z^2 - 4iz + 7 = 0$: le discriminant réduit est $\Delta' = (-2i)^2 - 7 = -4 - 7 = -11 = (i\sqrt{11})^2$. Les racines sont $z_1 = 2i - i\sqrt{11} = (2 - \sqrt{11})i$ et $z_2 = (2 + \sqrt{11})i$, d'où $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{(2 - \sqrt{11})i\ ;\ (2 + \sqrt{11})i\}}$.

b) Équation $z - 2\overline{z} = 1 + 9i$: en posant $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, on obtient $(x + iy) - 2(x - iy) = -x + 3iy = 1 + 9i$, soit $-x = 1$ et $3y = 9$, d'où $x = -1$ et $y = 3$, soit $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-1 + 3i\}}$.

2 pts

2/ Démonstration par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

• **Initialisation ($n = 1$) :** $S_1 = 1^2 = 1$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$: la propriété est vraie au rang 1.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

• **Conclusion :** Par récurrence, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice N°2 : (7 pts)

7 pts

1/ a) & b) $z_A = 1 + i\sqrt{3} = \boxed{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$ et $z_B = 2i = \boxed{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$. Comme $OA = |z_A| = 2$ et $OB = |z_B| = 2$, les points A et B appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 2.

2/ a) & b) $\dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1 + i(\sqrt{3} + 2)}{2} = z_C$: donc C est le milieu de $[AB]$.

3/ a) & b) Le triangle OAB étant isocèle en O ($OA = OB = 2$), la médiane $[OC)$ issue de O est aussi la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$. De plus, $\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) \equiv \arg(z_B) - \arg(z_A) \equiv \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} \equiv \boxed{\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]}$.

4/ a) & b) Comme $[OC)$ est bissectrice de $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB})$, on a $\arg(z_C) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12} \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$. De plus, $|z_C| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{8 + 4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, d'où $z_C = \left[\sqrt{2 + \sqrt{3}}\ ;\ \dfrac{5\pi}{12}\right]$.

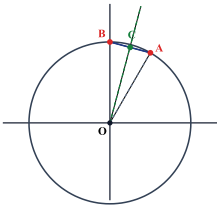
Par identification des formes algébrique et trigonométrique :

$$\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} \text{ et } \boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}.$$

5/ • $|z - (1 + i\sqrt{3})| = |1 - i| \Leftrightarrow |z - z_A| = \sqrt{2} \Leftrightarrow AM = \sqrt{2}$: (E_1) est le **cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$**.

• $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$: (E_2) est la **médiatrice du segment $[AB]$** (c'est-à-dire la droite (OC)).

apcpedagogie.com



Exercice N°3 : (8 pts)

8 pts

1/ a), b) & c) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-3)+1}{x-2} = \boxed{x-3+\dfrac{1}{x-2}}$ ($a=1$, $b=-3$, $c=1$). Comme fonction rationnelle, f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

2/ a) & b) • $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$: la droite $\boxed{D_1 : x = 2}$ est asymptote verticale à (C_f) ;

• $\lim\limits_{|x|\to+\infty} [f(x)-(x-3)] = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$: la droite $\boxed{D_2 : y = x-3}$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$ et $-\infty$.

• Pour tout $x \neq 2$, $4-x \neq 2$ et $f(4-x)+f(x) = (1-x+\dfrac{1}{2-x})+(x-3+\dfrac{1}{x-2}) = -2 = 2(-1)$: donc $\boxed{A(2\,;-1) \text{ est centre de symétrie de } (C_f)}$.

4/ Pour $x \neq 2$, $x^2-(5+m)x+2m+7 = 0 \Leftrightarrow x^2-5x+7 = m(x-2) \Leftrightarrow f(x) = m$ (et pour $x=2$, $1=0$ faux). Graphiquement : si $m \in]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[$, **2 solutions** ; si $m \in \{-3,1\}$, **1 solution** ; si $m \in]-3,1[$, **0 solution**.

5/ & 6/ $D_g = \mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. Pour tout $x \in D_g$, $2-x \in D_g$ et $|(2-x)-1| = |1-x| = |x-1|$, donc $g(2-x) = g(x)$: $\boxed{\Delta : x = 1 \text{ est axe de symétrie de } (C_g)}$. Pour $x \in [1,+\infty[\setminus\{2\}$, $|x-1| = x-1$, d'où $g(x) = x-3+\dfrac{1}{x-2} = f(x)$: on conserve la partie de (C_f) sur $[1,+\infty[\setminus\{2\}$ et on la complète par symétrie orthogonale d'axe $\Delta : x = 1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$ ‖ $-$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$ ‖ $-\infty$ ↘	-3	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

