Année scolaire : 2018 – 2019 (2ème Semestre) — Prof : Lotfi Mansouri

DEVOIR DE CONTROLE N°2

Épreuve : Mathématiques — Classe : 3ème Mathématiques — Durée : 2 heures

Exercice 1 : (6 points)

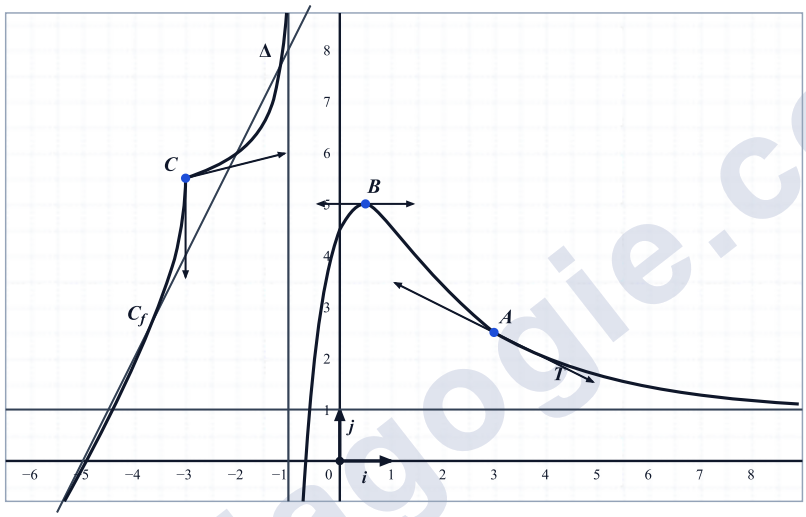
Ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f telle que :

• Δ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$;

• $y = 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$;

• $x = -1$ est une asymptote verticale.

Les flèches représentent des tangentes et des demi-tangentes.



1. Écrire l'ensemble de définition de f et les intervalles sur lesquels elle est continue.

2. Écrire l'équation de Δ.

3. Utiliser le graphique pour calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 2x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{1-f(x)}$; $\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{f(x)-5{,}5}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{f(x)-5}$.

4. Donner les valeurs suivantes : $f(3)$; $f'(3)$; $f'(\frac{1}{2})$; $f'_d(-3)$ et écrire une valeur approchée de $f(3{,}001)$.

5. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{f(x)-5{,}5}{3+x}$; $\lim\limits_{x\to-5^+} \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

6. Dresser le tableau de variation de f et préciser ses extrémums locaux.

Exercice 2 : (6 points)

I/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

apcpedagogie.com

2) **a)** Déterminer les points de C_f où la tangente est parallèle à la droite (O, i).

b) Déterminer les points de C_f où la tangente est parallèle à la droite $\Delta : y = -3x + 1$.

II/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue en 0.

2) Étudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

3) **a)** Justifier que g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$ sur chacun de ces intervalles.

b) Déterminer le signe de $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

4) Déterminer les extrémums de g et préciser leurs natures.

Exercice 3 : (3 points)

Soit $f(x) = 2\cos(2x) + 7\sin x - 5$ où $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

1. Vérifier que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 7y + 3 = 0$, où $y = \sin x$.

2. Montrer que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$.

3. Résoudre dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ l'équation : $f(x) = 0$.

Exercice 4 : (5 points)

Les parties **I/** et **II/** sont totalement indépendantes.

I/ 1. Montrer que : $2\cos(2x) \cdot \cos(4x) - \cos x - \cos(3x) = 2\cos(2x)(\cos(4x) - \cos x)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, \pi]$ l'équation : $2\cos(2x) \cdot \cos(4x) = \cos x + \cos(3x)$.

II/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $\Phi(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

1. Montrer que $\Phi(x)$ est un réel constant.

2. Vérifier que $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16} \Leftrightarrow \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{3}{16}$.

3. Posons $\alpha = \sin^2 x$ et $\beta = \cos^2 x$. Montrer que α et β sont solutions de l'équation $y^2 - y + \frac{3}{16} = 0$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

apcpedagogie.com