Année scolaire : 2026 – 2027

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques | Classe : 3ème Sciences Informatiques | Barème : 20 points

Exercice 1 : Arithmétique (4 points)

4 pts

A- Comme $x \wedge y = 251$, il existe $x', y' \in \mathbb{N}$ avec $x' \wedge y' = 1$ tels que $x = 251x'$ et $y = 251y'$. Alors $251(x' + y') = 2008 \Leftrightarrow x' + y' = 8$. Les couples premiers entre eux de somme 8 sont (1, 7), (3, 5), (5, 3) et (7, 1), d'où : $\boxed{S = \{(251, 1757) ; (753, 1255) ; (1255, 753) ; (1757, 251)\}}$.

B- $7(a - 1) = 3b$. Comme $7 \wedge 3 = 1$, d'après le théorème de Gauss, 3 divise $a - 1$: $a - 1 = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$), d'où $a = 3k + 1$ et $b = 7k$. Ainsi $\boxed{S = \{(3k + 1 ; 7k), k \in \mathbb{N}\}}$.

Exercice 2 : Suite récurrente linéaire d'ordre 2 (4 points)

4 pts

1. & 2. $U_2 = 6(2) - 5(1) = 7$; $U_3 = 6(7) - 5(2) = 32$; $U_4 = 6(32) - 5(7) = 157$.

L'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ ($\Delta = 16$) admet pour racines $\boxed{x_1 = 5 \text{ et } x_2 = 1}$.

3. & 4. Pour $n = 0$ et $n = 1$: $A + B = 1$ et $5A + B = 2$, d'où $4A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}$ et $B = \frac{3}{4}$. Ainsi $U_n = \frac{1}{4} \times 5^n + \frac{3}{4}$ et $\boxed{U_{10} = \frac{5^{10} + 3}{4} = 2\,441\,407}$.

Exercice 3 : Lecture graphique et identification (5 points)

5 pts

1., 2. & 3. Graphiquement : $A(0 ; -2)$ et $B(1 ; 1)$. La tangente en A passe par $(1 ; 5)$, d'où $f'(0) = \frac{5 - (-2)}{1 - 0} = 7$; la tangente en B est horizontale, d'où $f'(1) = 0$. De plus, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

4., 5. & 6. On obtient $f(0) = d = -2$, $f'(0) = c = 7$, $f(1) = a + b + 7 - 2 = 1 \Leftrightarrow a + b = -4$ et $f'(1) = 3a + 2b + 7 = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b = -7$, d'où $a = 1$, $b = -5$, soit $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

Tangente T en 0 : $\boxed{y = 7x - 2}$. Comme $f(x) - (7x - 2) = x^2(x - 5)$, C est en dessous de T sur $]-\infty ; 5[$ et au-dessus sur $]5 ; +\infty[$ (point d'inflexion en $x = 0$).

Exercice 4 : Étude de fonction et tangentes (4 points)

4 pts

1. a- & b- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x}$, d'où $f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - x^2}{x^2}$. La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$, soit en $\boxed{x = -1 \text{ et } x = 1}$ (avec $f(-1) = 4$ et $f(1) = 0$).

2. & 3. • $f'(x) = -2 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{x^2} = -2 \Leftrightarrow x^2 = -1$ (impossible) : il n'existe **aucun point**.

• $f'(x) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 = 3$, soit $\boxed{x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}}$.

Exercice 5 : Problème d'optimisation (3 points)

3 pts

1. & 2. $M(x ; x^2 - 1)$, donc $OM^2 = x^2 + (x^2 - 1)^2 = x^4 - x^2 + 1$. On a $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$, qui s'annule en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	**3/4**	↗	**1**	↘	**3/4**	↗	$+\infty$

3. Le minimum de OM^2 est $\frac{3}{4}$, atteint en $M_1(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{1}{2})$ et $M_2(\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{1}{2})$. La distance minimale est $\boxed{OM_{min} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

apcpedagogie.com