Date : 03 Mars 2026 **Année scolaire : 2025 – 2026**

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques **Classe : 3ème Mathématiques** **Durée : 3 heures**

Le sujet comporte 4 exercices dont une feuille annexe (Exercices 3 et 4) à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Une urne contient 15 jetons indiscernables au toucher :

• **6 jetons rouges** numérotés 1, 2, 3, 4, 4, 4 ;

• **5 jetons verts** numérotés 1, 2, 3, 4, 4 ;

• **4 jetons bleus** numérotés 1, 2, 3, 4.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. À chaque jeton portant le numéro $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, on associe un point M d'affixe z définie par :

• $z = n$ si le jeton tiré est rouge ;

• $z = in$ si le jeton tiré est vert ;

• $z = -n(1 - i)$ si le jeton tiré est bleu.

A) On tire simultanément trois jetons de l'urne.

1) Calculer le nombre total des tirages possibles.

2) Déterminer le nombre des tirages possibles contenant trois couleurs distinctes.

3) Déterminer le nombre des tirages possibles pour que les trois points associés soient alignés.

4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 4. Déterminer le nombre des tirages possibles pour qu'au moins deux points associés appartiennent à $\mathscr{C}$.

B) On tire successivement et sans remise trois jetons de l'urne.

1) Calculer le nombre total des tirages possibles.

2) Déterminer le nombre des tirages possibles contenant trois couleurs distinctes.

3) Déterminer le nombre des tirages possibles pour que la somme des numéros soit égale à 5.

4) Déterminer le nombre des tirages possibles pour que les trois numéros soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.

C) On tire deux jetons successivement avec remise.

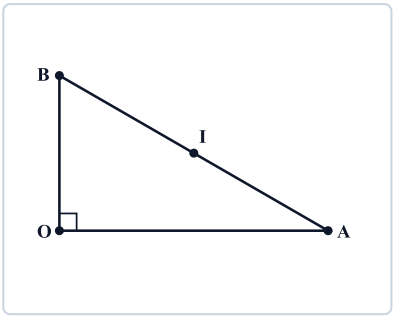
1) Calculer le nombre total des tirages possibles.

2) Soient M_1 le point d'affixe associé au premier jeton tiré, M_2 le point d'affixe associé au deuxième jeton tiré et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer le nombre des tirages possibles pour que M_2 soit l'image de M_1 par R.

apcpedagogie.com

Exercice 2 : (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB rectangle en O tel que $AB = 2OB$ (voir figure ci-contre). Soit I le milieu de $[AB]$.



1) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui envoie I en O et A en B.

2) Déterminer l'angle de R.

3) Soit Ω le centre de R. Construire Ω.

4) Montrer que Ω appartient au segment $[OA]$.

5) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(O, 2)$ et $(A, 1)$.

Exercice 3 : (5 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) **a-** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -3$.

b- Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z^2 + 2z + 4 = (z + 1)^2 + 3$.

c- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$.

2) Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$, $c = -1 - i\sqrt{3}$ et $d = -4 + 2i\sqrt{3}$. Sur la feuille annexe, $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 2.

a- Écrire b sous forme trigonométrique.

b- Placer A et construire les points B et C.

3) **a-** Vérifier que $\dfrac{a-d}{b-d} = 2$. En déduire que B est le milieu de $[AD]$ et placer D.

b- Montrer que $(\vec{OB}, \vec{OC}) \equiv \arg(c) - \arg(b)\ [2\pi]$.

c- En déduire que C est l'image de B par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

d- Soit E le point d'affixe $\overline{d}$. Montrer que $R(D) = E$.

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que $\Delta : x = 2$ est un axe de symétrie à $\mathscr{C}_f$.

2) **a-** Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

3) **a-** Montrer que $D : y = x - 2$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

b- Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et D.

4) Tracer $\mathscr{C}_f$ et D sur la feuille annexe.

apcpedagogie.com

5) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

a- Montrer par récurrence que pour tout entier n, on a : $U_n \geq 2$.

b- Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

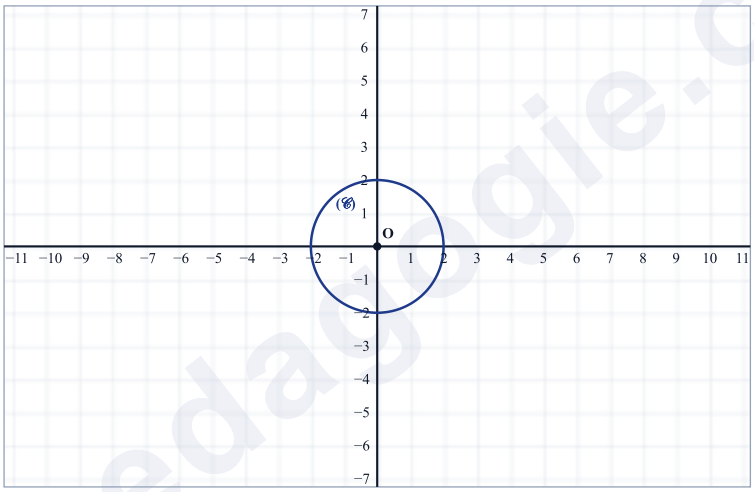
6) **a-** Montrer que $U_{n+1} - 2 \leq \frac{7}{4}(U_n - 2)$.

b- En déduire que $U_n - 2 \leq \frac{7^n}{4^{n-1}}$.

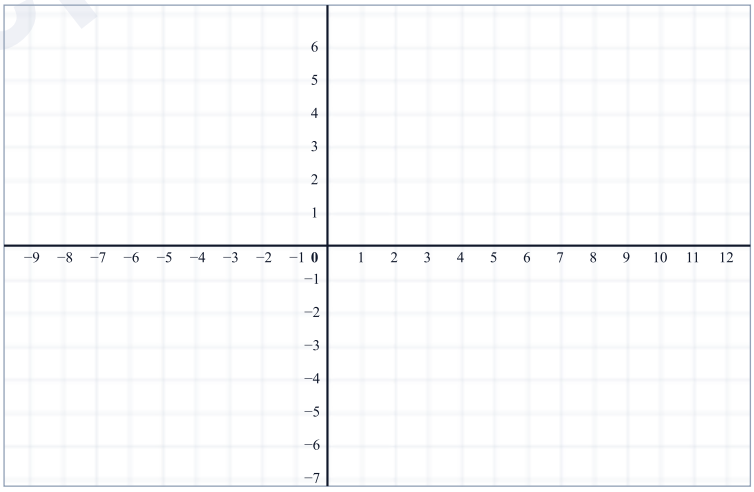
c- Soit $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$. Montrer que $2n + 2 \leq S_n \leq 2n + 2 - \frac{16(1 - (\frac{7}{4})^{n+1})}{3}$.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE **Nom : ..... Prénom : ..... Classe : 3M** **N° : .....**

Exercice 3 :



Exercice 4 :



apcpedagogie.com