CORRECTION DU DEVOIR DE CONTRÔLE N°2

Épreuve : Mathématiques | Classe : 3ème Mathématiques | Barème : 20 points

EXERCICE 1 : (6 points)

2,5 pts

1/ a- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)+4}{x-1} = \boxed{x - 2 + \dfrac{4}{x-1}}$ $(a = 1, b = -2, c = 4)$.

b- & c- f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (fonction rationnelle) et $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$.

Asymptotes : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, donc $\boxed{x = 1}$ est asymptote verticale ; comme $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - (x-2)] = 0$, la droite $\boxed{\Delta : y = x - 2}$ est asymptote oblique en $\pm\infty$.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-5	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

3,5 pts

2/ a- & b- Pour $x \neq 1$, $f(x) = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = (2x+m)(x-1) \Leftrightarrow x^2 + (m+1)x - (m+6) = 0$.

Son discriminant vaut $\Delta_m = (m+1)^2 + 4(m+6) = m^2 + 6m + 25 = (m+3)^2 + 16 > 0$ pour tout $m \in \mathbb{R}$: D_m coupe $\mathscr{C}$ en deux points distincts $M'(x', y')$ et $M''(x'', y'')$. Le milieu I_m vérifie $x_I = \dfrac{x' + x''}{2} = -\dfrac{m+1}{2}$ et $y_I = 2x_I + m = -1$. Lorsque m décrit $\mathbb{R}$, x_I décrit $\mathbb{R}$: l'ensemble des points I_m est la **droite d'équation $y = -1$**.

3/ a-, b-, c- & d- Pour tout point $M(x, y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans $R' = (A, \vec{u}, \vec{j})$ avec $A(1, -1)$ et $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, on a $\overrightarrow{AM} = (x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j} = X(\vec{i} + \vec{j}) + Y\vec{j}$, soit $x = X + 1$ et $y = X + Y - 1$. Ainsi $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow X + Y - 1 = (X+1) - 2 + \dfrac{4}{X} \Leftrightarrow \boxed{Y = \dfrac{4}{X}}$ $(X \neq 0)$.

Dans R', la tangente Δ_0 en $M_0(x_0, \dfrac{4}{x_0})$ a pour équation $Y = -\dfrac{4}{x_0^2}(X - x_0) + \dfrac{4}{x_0} = -\dfrac{4}{x_0^2}X + \dfrac{8}{x_0}$.

Elle coupe $(A, \vec{u})$ $(Y = 0)$ en $T(2x_0, 0)$ et $(A, \vec{j})$ $(X = 0)$ en $T'(0, \dfrac{8}{x_0})$: le milieu de $[TT']$ a pour coordonnées $(\dfrac{2x_0 + 0}{2}, \dfrac{0 + 8/x_0}{2}) = (x_0, \dfrac{4}{x_0})$, c'est donc $\boxed{M_0}$. Enfin, $(AT) = (A, \vec{u})$ et $(AT') = (A, \vec{j})$: comme $\vec{u} \cdot \vec{j} = (\vec{i} + \vec{j}) \cdot \vec{j} = 1 \neq 0$, les droites (AT) et (AT') **ne sont pas** perpendiculaires (leur angle géométrique vaut $\dfrac{\pi}{4}$).

EXERCICE 2 : (4 points)

apcpedagogie.com

4 pts

1/ $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$: f est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$, strictement décroissante sur $[2, +\infty[$, admet un maximum en $S(2, 2)$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = -\infty$. $\mathscr{C}$ est une parabole de sommet $S(2, 2)$ et d'axe $x = 2$.

2/ $M(x, y) \in D_m \Leftrightarrow m(x-3) + (4-y) = 0$. Pour $x = 3$ et $y = 4$, l'égalité est vérifiée pour tout $m \in \mathbb{R}$: toutes les droites D_m passent par le **point fixe $K(3, 4)$**.

3/ a- & b- Le projeté orthogonal de $M(x, y)$ sur $D : y = 3$ est $H(x, 3)$. Alors :

$MF^2 - MH^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 - (y-3)^2 = x^2 - 4x + 4 + (y^2 - 2y + 1) - (y^2 - 6y + 9) =$ **$x^2 - 4x + 4y - 4$**.

Si $M \in \mathscr{C}$, alors $y = -\frac{x^2}{4} + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4y - 4 = 0$, donc $MF^2 - MH^2 = 0 \Leftrightarrow MF = MH$ (avec $F \notin D$) : le triangle MFH est **isocèle en M**.

EXERCICE 3 : (5 points)

5 pts

1/ a- & b- Pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos\alpha > 0$ et $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$, d'où **$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$**. Alors $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{8} =$ **$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$**.

2/ a- & b- $\cos(4\alpha) = 2\cos^2(2\alpha) - 1 = 2(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}) - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin\alpha$: α est solution de $\cos(4x) = \sin x$.

Résolution : $\cos(4x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$ ou $4x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, soit **$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$**. Comme $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4} < \frac{1}{2}$ $(\alpha < \frac{\pi}{6})$, l'unique solution convenable est **$\alpha = \frac{\pi}{10}$**.

3/ a-, b- & c- $\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cos x + (\sqrt{5}-1)\sin x = 4(\cos\frac{\pi}{10}\cos x + \sin\frac{\pi}{10}\sin x) =$ **$4\cos(x - \frac{\pi}{10})$**.

• Équation $4\cos(x - \frac{\pi}{10}) = 2 \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{10}) = \frac{1}{2}$, d'où **$S_{\mathbb{R}} = \{\frac{13\pi}{30} + 2k\pi ; -\frac{7\pi}{30} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$**.

• Inéquation sur $[0, 2\pi[$: $\cos(x - \frac{\pi}{10}) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{10} \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, soit dans $[0, 2\pi[$: **$S = [0 ; \frac{13\pi}{30}] \cup [\frac{53\pi}{30} ; 2\pi[$**.

EXERCICE 4 : (5 points)

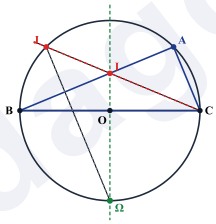
apcpedagogie.com

5 pts

1/ a- & b- L'angle inscrit $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ intercepte le même arc que l'angle au centre $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{4}$ [2π], d'où $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv$ **$\frac{\pi}{8}$ [2π]**. Comme [*BC*] est un diamètre de $\mathscr{C}$, *ABC* est rectangle en *A* ; de plus *AI* = *AC* et *I* ∈ [*AB*], donc *AIC* est rectangle isocèle direct en *A* et $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{4}$ [2π], soit $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv -\frac{3\pi}{4}$ [2π]. Dans le triangle *IBC*, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CI}) \equiv \pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$ [2π] : deux angles égaux à $\frac{\pi}{8}$, donc *IBC* est **isocèle en *I*** (*IC* = *IB*).

2/ a-, b-, c- & d- Comme *CI* = *IB* et $\overrightarrow{CI} \neq \overrightarrow{IB}$, il existe une unique rotation *R* telle que *R*(*C*) = *I* et *R*(*I*) = *B*. Son angle est $\theta \equiv (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{IB}) \equiv \pi - \frac{3\pi}{4} \equiv$ **$\frac{\pi}{4}$ [2π]**. Son centre Ω est l'intersection des médiatrices de [*CI*] et [*IB*]. Or $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega I}) + (\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ [2π] : le triangle Ω*BC* est rectangle en Ω, donc **Ω ∈ $\mathscr{C}$**. De plus, *OB* = *OC* et *IB* = *IC* et Ω*B* = Ω*C* (car *R* conserve les distances : Ω*C* = Ω*I* = Ω*B*) : les trois points *O*, *I*, Ω appartiennent tous à la médiatrice de [*BC*], ils sont donc **alignés**.

3/ a- & b- La médiatrice de [*IB*] passe par Ω ; comme *J* ∈ $\mathscr{C}$ et Ω*J* médiatrice de [*IB*], on a *JI* = *JB*. Par symétrie orthogonale $S_{(OI)}$ d'axe (*OI*) (médiatrice de [*BC*]), $S_{(OI)}(B) = C$ et $S_{(OI)}(I) = I$; comme *J* ∈ $\mathscr{C}$ et *JI* = *JB*, son symétrique $J' = S_{(OI)}(J)$ vérifie $J' \in \mathscr{C}$ et $J'I = J'C$, soit $J' = A$: *A* et *J* sont symétriques par rapport à (*OI*). Par suite, $S_{(OI)}$ transforme les points alignés *B*, *I*, *A* en *C*, *I*, *J* qui sont donc **alignés**. Enfin, Ω*A* = Ω*J* (symétrie d'axe (Ω*O*)) et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega J}) \equiv (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega O}) + (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega J}) \equiv \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ [2π], d'où **$R(A) = J$**.



apcpedagogie.com