Année scolaire : 2026 – 2027

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques | **Classe : 3ème Sciences Techniques** | **Durée : 3 heures**

Exercice 1 : (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte, choisir la bonne case :

Questions	Réponses		
1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x - 1 - \dfrac{x^2+2}{x^2-x+2}$. Au voisinage de ∞, la courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet comme asymptote oblique la droite d'équation :	☐ $y = 2x - 1$	☐ $y = 2x$	☐ $y = 2(x-1)$
2. Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$. Un argument du nombre complexe z^{2017} est égal à :	☐ $\dfrac{5\pi}{3}$	☐ $\dfrac{2\pi}{3}$	☐ $\dfrac{\pi}{3}$
3. Soient $z \in \mathbb{C}$, E un point d'affixe $(1-i)^2$, F un point d'affixe $(1+i)^2$ et M un point d'affixe z. L'ensemble $\{M(z) ; \lvert\overline{z} - 2i\rvert = \lvert z - 2i\rvert\}$ est :	☐ une droite	☐ un cercle	☐ vide
4. Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x - 6$. La courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse :	☐ $x = 2$	☐ $x = -6$	☐ $x = -2$

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E, F et A d'affixes respectives : $z_E = -2 - i$, $z_F = -i + \sqrt{3}$ et $z_A = -2 + 2i$.

1. **a/** Vérifier que le point F appartient à un cercle que l'on caractérisera. **b/** Placer soigneusement les points E, F et A. **c/** Montrer que AEF est un triangle rectangle.

2. **a/** Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_F}{z_A}$. **b/** Montrer, en utilisant les formes polaires de z_F et z_A, que l'on a : $\dfrac{z_F}{z_A} = [\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; -\dfrac{11\pi}{12}]$. **c/** En déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{11\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{11\pi}{12})$.

3. **a/** Déterminer le nombre complexe z_D affixe du point D pour que le quadrilatère $AEDF$ soit un parallélogramme.

b/ Soient $z \in \mathbb{C}$ et M un point d'affixe z, caractériser puis construire l'ensemble : $E = \{M(z) ; \arg(z + 4i - \sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3 : (5 points)

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison égale à 2 et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = 2V_n + U_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

apcpedagogie

1. **a/** Déterminer le terme général de la suite U et montrer qu'elle est divergente. **b/** Montrer que la suite V n'est ni arithmétique ni géométrique.
c/ Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n > 0$ et en déduire que V est strictement croissante. **d/** Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = n\,2^{n-1}$, en déduire que V diverge.

2. On définit la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $W_n = \dfrac{V_n}{U_n}$.
a/ Montrer que W est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme. **b/** Exprimer W_n en fonction de n puis retrouver V_n en fonction de n.

Exercice 4 : (6 points)

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+x+3}{x-2}$ et $g(x) = x^2 - 4x - 5$.
On désigne respectivement par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes de f et de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. **a/** Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g. **b/** Étudier la nature des branches infinies à $\mathscr{C}_g$.
c/ Montrer que la droite $\Delta : x = 2$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_g$. **d/** Tracer $\mathscr{C}_g$.

2. Étudier $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus. **3. a/** Montrer que, $\forall x \neq 2, f'(x) = \dfrac{g(x)}{(2-x)^2}$. **b/** Dresser le tableau de variation de f.

4. **a/** Vérifier, pour tout $x \neq 2, f(x) = \dfrac{9}{x-2} + x + 3$. **b/** En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ' que l'on déterminera. **c/** Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet le point $I(2, 5)$ comme centre de symétrie.

5. **a/** Étudier la position relative de Δ' et $\mathscr{C}_f$. **b/** Tracer $\mathscr{C}_f$. **6.** Discuter graphiquement et suivant le paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.

apcpedagogie.com