Date : 13 Mars 2024 — Année scolaire : 2023 / 2024

CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques — Niveau : 3ème Année — Section : Mathématiques — Durée : 3 heures

Exercice N°1 : (4,5 points)

2,5 pts

A) 1) Pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $a = -2 + 2i\sqrt{3} = 4(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) =$ **$4(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$**.

2) a- $a \times b = -16i \Rightarrow |a|\cdot|b| = 16 \Rightarrow 4|b| = 16 \Rightarrow |b| = 4 = OA = OB$. De plus, $\arg(a) + \arg(b) \equiv -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ $\Rightarrow \arg(b) \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$, d'où $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$: **$B = R_{(O, \frac{\pi}{6})}(A)$**.

3) a- $(z + 2 + \sqrt{3})^2 + 1 = z^2 + 2(2 + \sqrt{3})z + (4 + 4\sqrt{3} + 3) + 1 = z^2 + 2(2 + \sqrt{3})z + 8 + 4\sqrt{3}$.

b- (E) $\Leftrightarrow (z + 2 + \sqrt{3})^2 = i^2 \Leftrightarrow z_1 = -2 - \sqrt{3} + i$ et $z_2 = -2 - \sqrt{3} - i$. Ainsi

$S_{\mathbb{C}} = \{-2 - \sqrt{3} + i\ ;\ -2 - \sqrt{3} - i\}$.

4) a- $z_B = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = -2\sqrt{3} + 2i$, donc $\frac{z_B + z_C}{2} = \frac{-2\sqrt{3} + 2i - 4}{2} = -2 - \sqrt{3} + i =$ z_1 : M_1 est le milieu de $[BC]$, et $z_2 = \overline{z_1} \Rightarrow M_2 = S_{(O, \vec{u})}(M_1)$.

2 pts

B) 1) $a = -2 + 2i\tan(\alpha)$ avec $\tan(\alpha) \in \mathbb{R}$ lorsque $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: A décrit la droite fixe **$\Delta : x = -2$**.

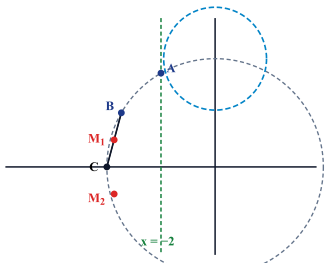
2) Pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(\alpha) > 0$ et $a = 2(-1 + i\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}) = \frac{2}{\cos(\alpha)}(-\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) =$

$\frac{2}{\cos(\alpha)}(\cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha))$.

3) a- $b - 4i = \frac{-16i}{a} - 4i = -8i\cos(\alpha)(\cos(\alpha - \pi) + i\sin(\alpha - \pi)) - 4i = 8i\cos^2(\alpha) - 8\cos(\alpha)\sin(\alpha) - 4i =$ $4i(1 + \cos(2\alpha)) - 4\sin(2\alpha) - 4i = 4(-\sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha))$.

b- $b - 4i = 4i(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)) \Rightarrow |b - 4i| = 4$ et $2\alpha \in]-\pi, \pi[$: l'ensemble des points B est

le cercle de centre $D(4i)$ et de rayon 4 privé du point O.



Exercice N°2 : (5,5 points)

2 pts

1) a- & b- Construction en escalier de U_1 et U_2 sur Figure 1 : on conjecture que (U_n) est **décroissante**.

2) a- Par récurrence : $U_0 = \sqrt{2} \in]1, \sqrt{2}]$. Si $1 < U_n \leq \sqrt{2}$, alors $4 < U_n^2 + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 < 2 - \frac{4}{U_n^2 + 3} \leq$ $\frac{6}{5} \leq 2 \Rightarrow 1 < U_{n+1} \leq \sqrt{2}$.

b- & c- . Comme et , on a : est .

apcpedagogie.com

$U_{n+1}^2 - U_n^2 = 2 - \dfrac{4}{3+U_n^2} - U_n^2 = \dfrac{-U_n^4 - U_n^2 + 2}{3+U_n^2} = \dfrac{(1-U_n^2)(2+U_n^2)}{3+U_n^2} U_n > 1 U_{n+1} + U_n > 0 U_{n+1} -$

$U_n < 0 (U_n)$ **strictement décroissante**

3,5 pts

3) a- $U_{n+1}^2 - 1 = 1 - \dfrac{4}{3+U_n^2} = \dfrac{U_n^2 - 1}{3+U_n^2} \leq \dfrac{U_n^2 - 1}{4}$ (car $3 + U_n^2 > 4$).

b- & c- Par récurrence, $U_n^2 - 1 \leq (\frac{1}{4})^n$; comme $U_n + 1 > 2$, $0 < U_n - 1 \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^n$. Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$.

4) a- & b- Pour $n = 1$, $1^2 \leq 4^1$; si $n^2 \leq 4^n$ $(n \geq 1)$, $(n+1)^2 - 4n^2 = -3(n-1)(n+\frac{1}{3}) \leq 0 \Rightarrow (n+1)^2 \leq 4n^2 \leq 4^{n+1}$. D'où $0 < V_n \leq \dfrac{n}{4^n} \leq \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.

5) a- & b- Sommation de $1 \leq U_k^2 \leq 1 + (\frac{1}{4})^k$: $n \leq S_n \leq n + \frac{1}{3}(1 - (\frac{1}{4})^n) \leq n + \frac{1}{3}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Enfin $T_n = \dfrac{S_n}{n} - 1$ vérifie $0 \leq T_n \leq \dfrac{1}{3n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$.

Exercice N°3 : (3 points)

3 pts

1) a- Trois couleurs différentes (1 R, 1 V, 1 N) : $C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1 =$ **30** tirages.

b- Deux boules « 0 » et une seule noire : soit $\{0_N, 0_{R \text{ ou } V}, X_{R \text{ ou } V, \neq 0}\}$ $(C_1^1 \times C_2^1 \times C_6^1 = 12)$, soit $\{0_R, 0_V, 2_N\}$ $(C_2^2 \times C_1^1 = 1)$: au total $12 + 1 =$ **13** tirages.

c- $p \in [0, 3] \Leftrightarrow p \in \{0, 1, 2, 3\}$: • $p = 0$ (au moins un 0) : $C_3^1 C_7^2 + C_3^2 C_7^1 + C_3^3 = 63 + 21 + 1 = 85$; • $p = 1$: impossible (seulement deux « 1 ») ; • $p = 2$ ($\{1, 1, 2\}$) : $C_2^2 \times C_1^1 = 1$; • $p = 3$ ($\{1, 1, 3\}$) : $C_2^2 \times C_4^1 = 4$. Total : $85 + 1 + 4 =$ **90** tirages.

2) a- Tirages avec remise (4 boules « 3 » et 6 autres) : une boule « 3 » parmi les deux premiers tirages et une « 3 » au troisième : $2 \times (4 \times 6) \times 4 =$ **192** cas.

b- (U_n) est arithmétique si et seulement si $C_3^b = 1 \Leftrightarrow b \in \{0, 3\}$ (7 boules possibles pour b) : $10 \times 7 \times 10 =$ **700** tirages.

c- (U_n) est géométrique non constante si et seulement si $c = 0$ (3 boules), $a \neq 0$ (7 boules) et $C_3^b \neq 1 \Leftrightarrow b \in \{1, 2\}$ (3 boules) : $7 \times 3 \times 3 =$ **63** tirages.

Exercice N°4 : (3,5 points)

3,5 pts

1) a- & b- Pour $n = 0$, $4^0 - 1 = 0$ est divisible par 7 ; si $7 \mid 4^{3n} - 1$, alors $4^{3n+3} - 1 = 64(4^{3n} - 1) + 63$ est divisible par 7. Comme $4^{3n} = 7q + 1$, on a $4^{3n+1} = 7(4q) + 4$ (reste **4**) et $4^{3n+2} = 7(16q + 2) + 2$ (reste **2**).

2) a- & b- $3(4) - 5(1) = 7$. Ainsi $3(x - 4) = 5(y - 1)$; comme $3 \wedge 5 = 1$, par théorème de Gauss $x = 5k + 4$ et $y = 3k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$: $S_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \{(5k + 4, 3k + 1) ; k \in \mathbb{N}\}$.

3) a-, b- & c- $3a - 5b = 3(5n + 4) - 5(3n + 1) = 7$: (a, b) est solution de (E) et $d = a \wedge b$ divise $3a - 5b = 7$, d'où $d \in \{1, 7\}$. Pour $n \geq 2$: si $d = 7$, alors $7 \mid a - 2b = 2 - n \Rightarrow 7 \mid n - 2$; réciproquement, si , alors et sont divisibles par , d'où et . En posant (pour), , soit un reste de dans la division de par , donc .

apcpedagogie.com

$7 \mid n-2a = 5(n-2)+14b = 3(n-2)+777 \mid dd = 7$

4) $n = 4^p n \geq 4p \geq 1(5\times 4^p+4) \wedge (3\times 4^p+1) = 7 \Leftrightarrow 7 \mid 4^p - 224^p 7$ **$p = 3q+2$ ($q \in \mathbb{N}$)**

Exercice N°5 : (3,5 points)

3,5 pts

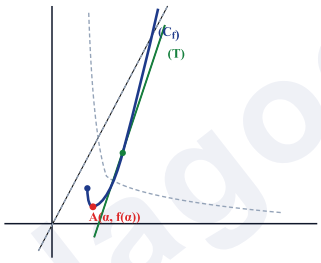
1) a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x^2}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$: (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ en $+\infty$.

b- $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} (x+1-\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}) = -\infty$: f n'est pas dérivable à droite en 1 et (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point (1, 1).

2) a-, b-, c- & d- Pour $x>1$, $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. Graphiquement ($D$ et (C_1)), $f'(x)<0$ sur $]1,\alpha[$ et $f'(x)>0$ sur $]\alpha,+\infty[$. En α, $2\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \Rightarrow \sqrt{\alpha-1} = \dfrac{1}{2\alpha}$, d'où $f(\alpha) = \alpha^2 - \dfrac{1}{\alpha}$ ($A(\alpha, f(\alpha)) \in (C_2)$).

x	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	‖ −	0	+
$f(x)$	1 ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

e- & 3) $f(2)=2$ et $f'(2)=3$, d'où **$(T) : y = 3x-4$**.



apcpedagogie.com