

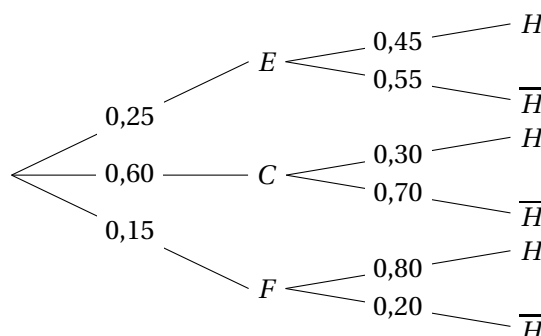
Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1

Partie A

1.



2. Calcul de $p(E \cap H)$:

$$\begin{aligned}
 P(E \cap H) &= P(E) \times P_E(H) \\
 &= 0,25 \times 0,45 \\
 &= 0,1125
 \end{aligned}$$

3. Les événements E , C et F forment une partition de Ω . D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(H) &= P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H) \\
 &= 0,1125 + (0,60 \times 0,30) + (0,15 \times 0,80) \\
 &= 0,1125 + 0,18 + 0,12 \\
 &= 0,4125
 \end{aligned}$$

4. Calcul de $P_H(E)$:

$$\begin{aligned}
 P_H(E) &= \frac{P(E \cap H)}{P(H)} \\
 &= \frac{0,1125}{0,4125} \\
 &\approx 0,273 \quad (\text{au millième près})
 \end{aligned}$$

Partie B

1. L'expérience consiste en la répétition de $n = 8$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (assimilable à un tirage avec remise). Le succès est « l'abonné a activé l'option », de probabilité $p = 0,4125$. Ainsi, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,4125)$.

2. Calcul de $P(X = 0)$:

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= \binom{8}{0} \times 0,4125^0 \times (1 - 0,4125)^8 \\
 &= 0,5875^8 \\
 &\approx 0,014
 \end{aligned}$$

3. (a) L'évènement contraire de « au moins un abonné a activé l'option » est « aucun abonné n'a activé l'option » :

$$\begin{aligned}
 q_n &= 1 - P(X = 0) \\
 &= 1 - \binom{n}{0} \times 0,4125^0 \times 0,5875^n \\
 &= 1 - 0,5875^n
 \end{aligned}$$

(b) On doit résoudre l'inéquation $q_n \geq 0,999$:

$$\begin{aligned} q_n \geq 0,999 &\iff 1 - 0,5875^n \geq 0,999 \\ &\iff 0,5875^n \leq 0,001 \\ &\iff \ln(0,5875^n) \leq \ln(0,001) \quad \text{car } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)} \quad \text{car } \ln(0,5875) < 0 \end{aligned}$$

Comme $\frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)} \approx 12,98$, la plus petite valeur de n telle que $q_n \geq 0,999$ est 13.

Partie C

- Les valeurs possibles pour Y sont : 5, 7, 10, 12, 16, 18.
- Loi de Y :

y_i	5	7	10	12	16	18
$P(Y = y_i)$	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

- Calcul de $E(Y)$:

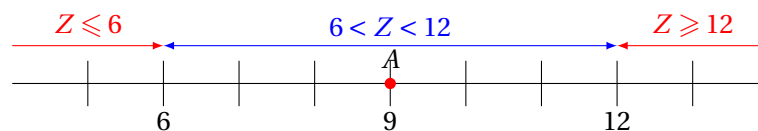
$$\begin{aligned} E(Y) &= 5 \times 0,1375 + 7 \times 0,1125 + 10 \times 0,42 + 12 \times 0,18 + 16 \times 0,03 + 18 \times 0,12 \\ &= 0,6875 + 0,7875 + 4,2 + 2,16 + 0,48 + 2,16 \\ &= 10,475 \end{aligned}$$

En moyenne, un abonné rapporte 10,48 € par mois à la plateforme (le millime n'existe pas).

- À la calculatrice, on obtient une variance $V(Y) \approx 13,70$.
- (a) $V(Z) = \sigma^2 = 2^2 = 4$.
(b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour tout réel $a > 0$:

$$P(|Z - E(Z)| \geq a) \leq \frac{V(Z)}{a^2}.$$

- Avec $E(Z) = 9$ et $a = 3$, on a : $P(|Z - 9| \geq 3) \leq \frac{4}{9}$. Le contraire de l'évènement $|Z - 9| \geq 3$ est l'évènement $|Z - 9| < 3$. Or $|Z - 9| < 3 \iff -3 < Z - 9 < 3 \iff 6 < Z < 12$.
Notons que $\{|Z - 9| \geq 3\} = \{Z \leq 6\} \cup \{Z \geq 12\}$.



Ainsi,

$$P(6 < Z < 12) = 1 - P(|Z - 9| \geq 3) \geq 1 - \frac{4}{9},$$

donc

$$P(6 < Z < 12) \geq \frac{5}{9}.$$

Comme $\frac{5}{9} > \frac{4,5}{9} = 0,50$, l'affirmation est justifiée.

Exercice 2

Partie A

1. $u_1 = 4 - \frac{4}{u_0} = 4 - \frac{4}{4} = 3$. Il y aura 3 000 perches-soleil.

2. (a) La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$h'(x) = 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$$

Pour tout $x > 0$, $h'(x) > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

(b) Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et $u_2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,66$. On a bien $2 \leq u_2 \leq u_1 \leq 4$. La propriété est vérifiée au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, ($n \geq 0$ et $2 \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n) \leq 4$).

La fonction h étant croissante sur $]0; +\infty[$, les images par celle-ci des quatre nombres précédents sont rangés dans le même ordre que ceux-ci :

$$h(2) \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n) \leq h(4).$$

Or $h(2) = 2$, $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$, $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(4) = 3 \leq 4$. D'où

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion :

La propriété est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4}.$$

(c) En particulier

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$ signifie que la suite (u_n) est décroissante;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq u_n$ signifie que la suite (u_n) est minorée par 2

Minorée et décroissante la suite u_n converge donc vers une limite ℓ qui vérifie $2 \leq \ell$.

(d) Comme quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n) = 4 - \frac{4}{u_n}$ que la fonction h est dérivable, donc continue sur $]0; +\infty[$, l'égalité précédente donne à la limite par continuité : $\ell = 4 - \frac{4}{\ell}$ la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$, (ℓ est un point fixe de h).

$$\begin{aligned} \ell = 4 - \frac{4}{\ell} &\iff \ell^2 = 4\ell - 4 \\ &\iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \\ &\iff (\ell - 2)^2 = 0 \\ &\iff (\ell - 2) = 0 \\ &\iff \ell = 2 \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$

(e) La limite étant de 2 (soit 2 000 individus), ce modèle ne prévoit pas lui non plus d'élimination à long terme de l'espèce.

3. (a) Le script complété est :

```
def population(s) :
    u = 4
    n = 0
    while u >= s :
        u = 4 - 4/u
        n = n + 1
    return n
```

- (b) En exécutant l'algorithme, on trouve que la commande `population(2.2)` renvoie $n = 10$. Cela signifie que c'est au bout de 10 ans (soit en 2035) que la population de perches-soleil passera en dessous de 2 200 individus pour la première fois.

Partie B

1. L'équation (E) est une équation différentielle de la forme $ay' + by = c$, les solutions sont de la forme

$$y(t) = Ke^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{a} = Ke^{-t} + 2, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

2. Calcul de K en utilisant la condition initiale $p(0) = 4$. La fonction p étant solution de (E), on a $p(x) = Ke^{-x} + 2$. De plus :

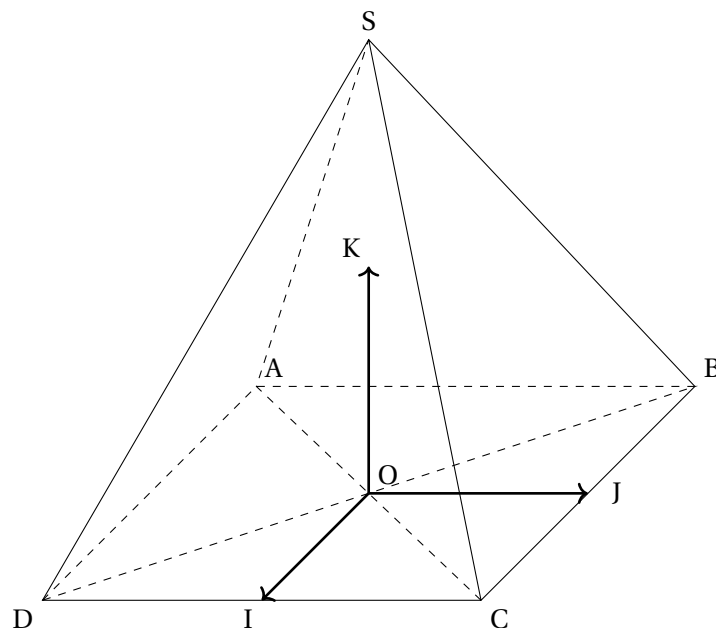
$$\begin{aligned} p(0) = 4 &\iff Ke^0 + 2 = 4 \\ &\iff K + 2 = 4 \\ &\iff K = 2 \end{aligned}$$

La fonction p , qui est la solution de (E) vérifiant $p(0) = 4$, est donc

$$p(t) = 2e^{-t} + 2.$$

3. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 2$. Ce modèle continu prévoit également une stabilisation à 2 000 individus, sans élimination.

Exercice 3



Partie A

1. Puisque O est l'origine du repère et que la base carrée est de côté 2 avec le centre en O, on a $A(-1; -1; 0)$ et $D(1; -1; 0)$.
2. D'après la formule du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= (1)(-1) + (1)(1) + (-2)(-2) \\ &= -1 + 1 + 4 \\ &= 4\end{aligned}$$

3. D'après la définition géométrique du produit scalaire $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = SC \times SB \times \cos(\widehat{BSC})$. On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} &= SC \times SB \times \cos(\widehat{BSC}) \\ 4 &= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} \times \cos(\widehat{BSC}) \\ 4 &= \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos(\widehat{BSC}) \\ \cos(\widehat{BSC}) &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

On en déduit $\widehat{BSC} = \arccos(\frac{2}{3}) \approx 48,2(^{\circ})$.

Partie B

1. (a) Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC) s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$. Or :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{SB} = 0(-1) + 2(1) + 1(-2) = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{SC} = 0(1) + 2(1) + 1(-2) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$, $\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (SBC).

- (b) Le vecteur $\vec{n}(0,2,1)$ étant normal au plan (SBC), ce dernier admet une équation cartésienne de la forme $0x + 2y + 1z + d = 0$. Le point $S(0;0;2)$ appartient au plan (SBC), donc les coordonnées de ce point vérifie l'équation du plan (SBC) et on a donc $2(0) + 1(2) + d = 0 \iff d = -2$.

Une équation de (SBC) est donc bien

$$\boxed{2y + z - 2 = 0}.$$

2. (a) La droite (OH) est perpendiculaire au plan (SBC) donc $\vec{n}$, qui est normal à (SBC), est aussi un vecteur directeur de (OH). Cette droite passe par $O(0; 0; 0)$. Une représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = 0 + 0t = 0 \\ y = 0 + 2t = 2t \\ z = 0 + 1t = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- (b) H appartient à (OH) et à (SBC), on a donc :

$$\begin{aligned} \text{— } H \in (OH) &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 2t \\ z_H = t \end{cases} \\ \text{— } H \in (SBC) &\iff 2y_H + z_H - 2 = 0 \end{aligned}$$

Le paramètre t , qui définit la position de H sur (OH), est donc solution de :

$$\begin{aligned} 2(2t) + t - 2 &= 0 \iff 5t = 2 \\ &\iff t = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} x_H &= 0 \\ y_H &= 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \\ z_H &= \frac{2}{5} \end{cases}$$

Les coordonnées de H, projeté orthogonal de O sur le plan (SBC) sont donc $\boxed{\left(0; \frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)}$.

(c) Calcul de la hauteur :

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Partie C

1. (a) Volume de $SABCD$:

$$\begin{aligned} V_{SABCD} &= \frac{1}{3} \times (2 \times 2) \times 2 \\ &= \frac{8}{3} \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

(b) La pyramide OCBS a pour base le triangle OCB, dont l'aire est le quart de l'aire du carré ABCD (soit $\frac{1}{4} \times 4 = 1$), donc :

$$\begin{aligned} V_{OCBS} &= \frac{1}{3} \times \text{Aire(OCB)} \times OS \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \\ &= \frac{2}{3} \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

2. Le triangle SBC est isocèle en S. La hauteur issue de S passe par J(milieu de [BC]). Les coordonnées de J sont $(0; 1; 0)$. Ainsi :

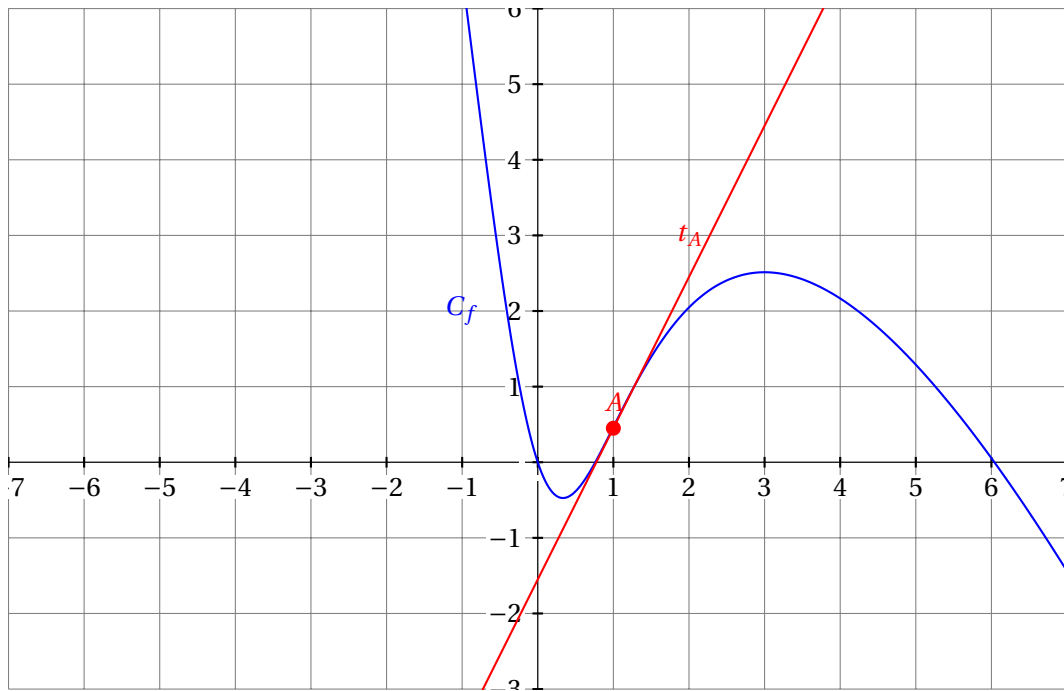
$$\begin{aligned} SJ &= \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \\ \text{Aire(SBC)} &= \frac{BC \times SJ}{2} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

3. On peut calculer le volume du tétraèdre OCBS en prenant pour base SBC et pour sommet O. Son volume est V_{OCBS} s'exprime en fonction de l'aire de SCB et de la hauteur OH et est égal à $\frac{2}{3}$. En utilisant les deux questions précédentes, on obtient donc :

$$\begin{aligned} V_{OCBS} &= \frac{1}{3} \times \text{Aire(SBC)} \times d(O, (SBC)) \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &= \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times d \\ \Leftrightarrow d &= \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}} \end{aligned}$$

Exercice 4

Étude de la fonction $f : x \mapsto 5\ln(x^2 + 1) - 3x$.



1. Graphiquement, la courbe semble convexe sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ et concave sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
2. Calcul de limite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty \text{ (limite d'une composée)}$$

De plus :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ (somme de limites)}$$

3. (a) Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \ln \left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right) - 3x \\ &= 5 \left(\ln(x^2) + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right) - 3x \quad \text{car } \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \\ &= 10 \ln(x) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - 3x \quad \text{car } \ln(a^2) = 2 \ln(a) \\ &= x \left(10 \frac{\ln(x)}{x} - 3 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \end{aligned}$$

- (b) Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, on a donc :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(10 \frac{\ln(x)}{x} - 3 \right) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(10 \frac{\ln(x)}{x} - 3 \right) = -\infty \text{ (produit de limites)}$$

De plus :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0 \text{ (limite d'une composée)}$$

On a donc (somme de limites) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

4. Variations de f :

(a) Calculons la dérivée de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times \frac{2x}{x^2 + 1} - 3 \\ &= \frac{10x - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

(b) Le signe de $f'(x)$ dépend du numérateur $-3x^2 + 10x - 3$; en effet $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$. Le numérateur est un polynôme du second degré dont la représentation graphique est concave ($a < 0$). Calculons ses racines :

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-3) \times (-3) = 100 - 36 = 64$$

$$x_1 = \frac{-10 - 8}{-6} = 3$$

$$x_2 = \frac{-10 + 8}{-6} = \frac{1}{3}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$1/3$	3	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Variations de f	$+\infty$	$f(\frac{1}{3})$	$f(3)$	$-\infty$	

Avec $f(3) = 5\ln(10) - 9$ et $f(\frac{1}{3}) = 5\ln(\frac{10}{9}) - 1$.

5. On a $f''(x) = \frac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$

(a) Le signe de $f''(x)$ dépend uniquement du numérateur car $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)^2 > 0$. Le numérateur est un polynôme du second degré dont la représentation graphique est concave ($a < 0$). Ses racines sont : -1 et 1 . On en déduit que :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Convexité de f	Concave		Convexe		Concave

La fonction est donc bien convexe sur $[-1; 1]$ et concave ailleurs. La conjecture n'est pas validée car on ne voyait pas la courbe sur la partie $[-\infty; -1[$. La conjecture n'est pas validée.

- (b) La tangente à C_F au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$. Or :

$$\begin{aligned} f(1) &= 5\ln(2) - 3 \\ f'(1) &= \frac{-3 + 10 - 3}{2} = 2 \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est donc

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \iff y = 2(x - 1) + 5\ln(2) - 3 \iff \boxed{y = 2x - 5 + 5\ln(2)}.$$

- (c) Pour $x \geq 1$, la fonction f est concave, sa courbe $\mathcal{C}_f$ est donc située en dessous de ses tangentes, en particulier en dessous de la tangente en A . On a donc $\forall x \in [1 ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq 2x - 5 + 5\ln(2) \\ 5\ln(x^2 + 1) - 3x &\leq 2x - 5 + 5\ln(2) \\ 5\ln(x^2 + 1) &\leq 5x - 5 + 5\ln(2) \\ \ln(x^2 + 1) &\leq x - 1 + \ln(2) \end{aligned}$$