

EXERCICE 1 (6 points)

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + U_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- 1) Calculer U_1 et U_2 . En déduire que la suite (U_n) n'est pas géométrique.
- 2)
 - a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.
 - b) Montrer alors que la suite (U_n) est décroissante.
 - c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.
- 3) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 1$
 - a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
En déduire l'expression de V_n en fonction de n .
 - b) Exprimer U_n en fonction de n puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

EXERCICE 2 (6 points)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant, chacune, une des lettres A, B, C, O, P, R, S, T (chaque lettre figure sur une seule boule).

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard cinq boules de l'urne.

- 1) On désigne par E et F les événements suivants :
E : «Les lettres du mot "BAC" figurent sur trois boules parmi les cinq boules tirées».
F : «Les lettres du mot "SPORT" figurent sur les cinq boules tirées».
 - a) Justifier que $p(E) = \frac{5}{28}$.
 - b) Calculer $p(F)$ et en déduire $p(E \cup F)$.
- 2) Soit X l'aléa numérique qui à chaque épreuve associe le nombre de lettres du mot "SPORT" figurant sur les boules tirées.
 - a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	2			
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{10}{56}$			

- b) Déduire la probabilité de l'événement G:
« Au moins une lettre du mot BAC apparaît dans le tirage des cinq boules »

PROBLEME (8 points)

Dans la feuille jointe à rendre, la courbe (C) est la représentation graphique, dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3.$$

- 1) a) Donner $f(1)$ et $f'(1)$.
b) Justifier que pour tout $x \in]-1, 3[$; $f(x) > 0$.
- 2) Placer sur l'axe des abscisses les réels α et β vérifiant :
 $f(\alpha) = f(\beta) = 1$ ($\alpha < \beta$).
- 3) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1, 3[$ par

$$g(x) = \text{Log}(-x^2 + 2x + 3).$$

On désigne par (C') sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 - b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 - c) Justifier que g est dérivable sur I et vérifier que pour tout $x \in I$;
$$g'(x) = \frac{2(1-x)}{f(x)}$$
 - d) Dresser alors le tableau de variations de g .
- 4) a) Vérifier que $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.
b) Tracer la courbe (C') sur la feuille à rendre. (On tracera les asymptotes à (C')).

Feuille à rendre

