

|                                                                                                                    |                                |                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-----------------|
| REPUBLICQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>♦♦♦♦<br><b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b><br><b>SESSION 2015</b> | Epreuve : <b>MATHEMATIQUES</b> |                 |
|                                                                                                                    | Durée : 2 H                    | Coefficient : 1 |
| <b>Section : sport</b>                                                                                             | <b>Session de contrôle</b>     |                 |

Le sujet comporte 3 pages.

### Exercice 1 (7 points)

Soit  $(U_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1) a) Calculer  $U_1$  et  $U_2$ .  
b) En déduire que la suite  $(U_n)$  n'est ni arithmétique, ni géométrique.
- 2) a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n < 4$ .  
b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} - U_n = \frac{3}{4}(4 - U_n)$ .  
c) Montrer alors que la suite  $(U_n)$  est croissante.  
d) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente.
- 3) Soit  $(V_n)$  la suite définie par :  $V_n = U_n - 4$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .  
b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ .  
c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .
- 4) Soient  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  et  $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$   
a) Montrer que  $S_n = \frac{-8}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$ .  
b) En déduire l'expression de  $S'_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 2 (6 points)

Un sac contient sept jetons indiscernables au toucher dont :

- quatre noirs et numérotés : 1 ; 2 ; 2 et 3.
- trois blancs et numérotés : 1 ; 2 et 2.

On tire simultanément et au hasard deux jetons du sac.

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir deux jetons blancs »

B : « Obtenir au moins un jeton noir »

C : « La somme des numéros portés par les deux jetons est égale à 4 ».

1) a) Calculer  $p(A)$ .

b) En déduire  $p(B)$ .

2) Montrer que  $p(C) = \frac{8}{21}$ .

3) Soit  $X$  la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe la somme des numéros portés par les deux jetons tirés.

a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .

|              |   |   |                |   |
|--------------|---|---|----------------|---|
| $x_i$        | 2 | 3 | 4              | 5 |
| $p(X = x_i)$ |   |   | $\frac{8}{21}$ |   |

b) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

### Exercice 3 (7 points)

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(C)$  sa représentation graphique, dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

A) On donne ci-dessous le tableau de variation de  $f$ .

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0 | -         |
| $f$     | $-\infty$ | 1 | $-\infty$ |

1) En utilisant le tableau de variation de  $f$  et sans justification :

a) Donner  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Donner  $f(0)$  et  $f'(0)$ .

2) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $[0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .

**B)** Dans la suite, on suppose que,  $f(x) = x + 2 - e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

1) Montrer que  $1 < \alpha < 2$ .

2) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Soit D la droite d'équation  $y = x + 2$ .

a) Montrer que la droite D est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de  $-\infty$ .

b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote D.

4) Tracer dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la droite D et la courbe (C).

5) a) Vérifier que la fonction F définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - e^x$

est une primitive de f sur  $\mathbb{R}$ .

b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations,  $x = 0$  et  $x = 1$ .