

Section : Sport

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 2016 \\ u_{n+1} = \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$1)a) u_1 = \frac{1}{e}(u_0 - 2015) + 2015 = \frac{1}{e}(2016 - 2015) + 2015 = \frac{1}{e} + 2015$$

$$u_2 = \frac{1}{e}(u_1 - 2015) + 2015 = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e} + 2015 - 2015\right) + 2015 = \frac{1}{e^2} + 2015$$

$$\begin{aligned} b) (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) &= \left(\frac{1}{e^2} + 2015\right) - \left(\frac{1}{e} + 2015\right) - \left(\frac{1}{e} + 2015 - 2016\right) \\ &= \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e} - 1\right) \\ &= \frac{1}{e^2} - 2 \times \frac{1}{e} + 1 = \left(\frac{1}{e} - 1\right)^2. \end{aligned}$$

c) On a $(u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) \neq 0$, c'est à dire $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, d'où (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

2)a) On a : $u_{n+1} = \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015 - u_n \\ &= \frac{1}{e}u_n - u_n - \frac{1}{e} \times 2015 + 2015 \\ &= \left(\frac{1}{e} - 1\right)u_n - \left(\frac{1}{e} - 1\right) \times 2015 \\ &= \left(\frac{1}{e} - 1\right)(u_n - 2015) \end{aligned}$$

b) Montrons par récurrence que $u_n > 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $u_0 = 2016 > 2015$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n . C'est-à-dire $u_n > 2015$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n + 1$.

On a $u_n > 2015 \Rightarrow u_n - 2015 > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{e}(u_n - 2015) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015 > 2015$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 2015$$

D'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, $u_n > 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On a: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{e} - 1\right)(u_n - 2015)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or $\frac{1}{e} - 1 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2015$, d'où $u_{n+1} - u_n < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Parsuite $u_{n+1} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

3)a) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2015 = \frac{1}{e}(u_n - 2015) = \frac{1}{e}v_n.$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme v_0

$$v_0 = u_0 - 2015 = 2016 - 2015 = 1.$$

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

$$\text{On a } v_n = \left(\frac{1}{e}\right)^n v_0 = \frac{1}{e^n} \times 1 = \frac{1}{e^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

c) $v_n = u_n - 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_n = v_n + 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{e^n} + 2015 = e^{-n} + 2015.$$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} + 2015 = 2015$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$.

$$4) u_n < 2015 + \frac{1}{2016} \Leftrightarrow e^{-n} + 2015 < 2015 + \frac{1}{2016}$$

$$\Leftrightarrow e^{-n} < \frac{1}{2016}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{2016}$$

$$\Leftrightarrow e^n > 2016$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^n) > \ln(2016)$$

$$\Leftrightarrow n > \ln(2016)$$

$\ln(2016) \approx 7,60$ d'où $n_0 = 8$.

Exercice 2

Une urne contient 5 boules numérotées : 1, 1, 2, 2, 3.

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Soit Ω l'univers des cas possibles. On a $\text{Card}(\Omega) = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$.

A : « Les deux boules tirées portent le même numéro ».

C'est-à-dire tirer les deux boules qui portent le numéro 1 ou les deux boules qui portent le numéro 2.

$$p(A) = \frac{C_2^2 + C_2^2}{10} = \frac{1+1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

B : « Parmi les boules tirées, une seule porte le numéro 1 ».

C'est-à-dire tirer une boule parmi les 2 portant le numéro 1, et une boule parmi les autres (qui portent le numéro 2 ou 3).

$$p(B) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{10} = \frac{2 \times 3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

C : « Les deux boules tirées portent le même numéro ou une seule d'entre elles porte le numéro 1 ».

On peut remarquer que $C = A \cup B$. D'où $p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ puisque A et B sont deux événements incompatibles.

$$p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules portant un numéro impair tirées.

a) Lors d'un tirage de deux boules, on peut obtenir 1 boule portant un numéro impair ou deux ou aucune. D'où $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

(X = 0) : « Aucune boule portant un numéro impair est tirée », cela veut dire « tirer deux boules portant le numéro 2 ». $p(X = 0) = \frac{1}{10}$.

(X = 1) : « Une seule boule portant un numéro impair est tirée », cela veut dire « tirer une boule portant un numéro impair et l'autre portant le numéro 2 ». $p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{10} = \frac{6}{10}$.

(X = 2) : « Deux boules portant des numéros impairs sont tirées ».

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2}{10} = \frac{3}{10}.$$

On peut résumer la loi de probabilité de la variable aléatoire X dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

b) Soit p la probabilité d'avoir au moins une boule portant un numéro impair.

$$\text{On a } p = p(X \geq 1) = p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

c) L'espérance mathématique de X : $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{12}{10} = 1,2$.

Exercice 3

$f(x) = e^{x-\ln 2}$; $x \in \mathbb{R}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-\ln 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x e^{-\ln 2} = 0$, car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-\ln 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x e^{-\ln 2} = +\infty$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

b) $f(x) = e^{x-\ln 2}$; $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = (x - \ln 2)' e^{x-\ln 2} = e^{x-\ln 2}$; $x \in \mathbb{R}$.

c) On a $f'(x) = e^{x-\ln 2} > 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	0		$+\infty$

d) T la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

$T : y = f'(0)x + f(0) = e^{-\ln 2} x + e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}(x + 1)$.

$T : y = \frac{1}{2}(x + 1)$.

2)a) $f(\ln 2) = e^{\ln 2 - \ln 2} = e^0 = 1$, d'où le point $A(\ln 2, 1) \in (C)$.

$f(2\ln 2) = e^{2\ln 2 - \ln 2} = e^{\ln 2} = 2$, d'où le point $B(2\ln 2, 2) \in (C)$.

b) Soit D la droite d'équation $y = \frac{1}{\ln 2} x$.

Pour $x = \ln 2$; $y = \frac{1}{\ln 2} \ln 2 = 1$; d'où le point $A(\ln 2, 1) \in D$.

Pour $x = 2\ln 2$; $y = \frac{1}{\ln 2} \times 2\ln 2 = 2$; d'où le point $B(2\ln 2, 2) \in D$.

Les points A et B appartiennent à la droite D, d'où $D = (AB)$.

Ainsi une équation de la droite (AB) est $y = \frac{1}{\ln 2} x$.

c) Voir l'annexe.

3)a) On peut remarquer d'après le graphique que la droite (AB) est au-dessus de la courbe (C)

dans l'intervalle $\ln 2, 2\ln 2$. D'où $\frac{1}{\ln 2} x \geq f(x)$, pour tout $x \in \ln 2, 2\ln 2$

$$\frac{1}{\ln 2} x \geq f(x), \text{ pour tout } x \in \ln 2, 2\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} x \geq e^{x-\ln 2}, \text{ pour tout } x \in \ln 2, 2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} x - e^{x-\ln 2} \geq 0, \text{ pour tout } x \in \ln 2, 2\ln 2$$

b) $F(x) = \frac{1}{2\ln 2} x^2 - e^{x-\ln 2}$; $x \in \mathbb{R}$.

$F'(x) = \left(\frac{1}{2\ln 2} x^2 - e^{x-\ln 2} \right)' = \frac{1}{\ln 2} x - e^{x-\ln 2}$; $x \in \mathbb{R}$.

On a $\frac{1}{\ln 2} x - e^{x-\ln 2} \geq 0$, pour tout $x \in \ln 2, 2\ln 2$, d'où $F'(x) \geq 0$, pour tout $x \in \ln 2, 2\ln 2$.

Par suite F est croissante sur $\ln 2, 2\ln 2$.

4) Soit S l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C) , les droites d'équations $x = \ln 2$, $x = 2\ln 2$ et la droite (AB) .

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \left(\frac{1}{\ln 2} x - e^{x-\ln 2} \right) dx = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} F'(x) dx \\
 &= F(x) \Big|_{\ln 2}^{2\ln 2} = F(2\ln 2) - F(\ln 2) \\
 &= \left(\frac{1}{2\ln 2} (2\ln 2)^2 - e^{2\ln 2 - \ln 2} \right) - \left(\frac{1}{2\ln 2} (\ln 2)^2 - e^{\ln 2 - \ln 2} \right) \\
 &= (2\ln 2) - e^{\ln 2} - \left(\frac{1}{2} \ln 2 - 1 \right) \\
 &= 2\ln 2 - 2 - \left(\frac{1}{2} \ln 2 - 1 \right) = \frac{3}{2} \ln 2 - 1 \text{ u.a}
 \end{aligned}$$

L'annexe :

