

Section : Sport

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 4U_n + 3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1)a) $U_1 = 4U_0 + 3 = 4 \times 2 + 3 = 11$

$$U_2 = 4U_1 + 3 = 4 \times 11 + 3 = 47$$

$$U_1 - U_0 = 11 - 2 = 9$$

$$U_2 - U_1 = 47 - 11 = 36$$

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{11}{2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{47}{11}$$

b) On a $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$, d'où (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

On a $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$, d'où (U_n) n'est pas une suite géométrique.

2) (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = 1 + U_n$.

a) $V_{n+1} = 1 + U_{n+1} = 1 + 4U_n + 3 = 4 + 4U_n = 4(1 + U_n) = 4V_n$.

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison 4.

b) $V_0 = 1 + U_0 = 1 + 2 = 3$.

$$V_n = V_0 \times 4^n = 3 \times 4^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 4^n = +\infty$.

On a $V_n = 1 + U_n$, d'où $U_n = V_n - 1 = 3 \times 4^n - 1$ et $\frac{1}{U_n} = \frac{1}{3 \times 4^n - 1}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{U_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 \times 4^n - 1} = 0.$$

Exercice 2

Dix élèves d'un lycée sportif ont été médaillés lors d'une compétition régionale.

	Judo	Escrime	Athlétisme
Filles	1	3	2
Garçons	2	1	1

Une association pour la promotion des sports individuels se charge de récompenser trois parmi ces dix élèves en leur payant un voyage à l'étranger.

A et B les évènements suivants :

A : « Les trois élèves récompensés sont du même sexe ».

B : « Les trois élèves récompensés ont la même spécialité sportive ».

1) Le nombre de cas possibles est $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$.

a) A : « Les trois élèves récompensés sont du même sexe ».

On a 6 filles et 4 garçons médaillés. Donc dans ce cas les récompensés vont être 3 parmi les 6 filles ou 3 parmi les 4 garçons.

$$p(A) = \frac{C_6^3 + C_4^3}{120} = \frac{20 + 4}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

b) B : « Les trois élèves récompensés ont la même spécialité sportive ».

Dans ce cas les récompensés vont être les 3 qui pratiquent le Judo ou 3 parmi les 4 qui pratiquent l'escrime ou les 3 qui pratiquent l'athlétisme.

$$p(B) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_3^3}{120} = \frac{1 + 4 + 1}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}.$$

L'évènement $A \cap B$: « Les trois élèves récompensés sont du même sexe et ont la même spécialité ». Cela correspond au seul cas : les trois élèves récompensés sont les 3 filles qui pratiquent l'escrime. D'où $p(A \cap B) = \frac{1}{120}$.

c) L'évènement : « Les trois élèves récompensés sont du même sexe ou de même spécialité sportive » est l'évènement $A \cup B$.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} - \frac{1}{120} = \frac{24 + 6 - 1}{120} = \frac{29}{120}.$$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de trois élèves récompensés, associe le nombre de filles figurant dans le groupe.

a) Les valeurs possibles prises par X : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

b) Le groupe soit composé uniquement de garçons correspond à la valeur 0 prise par X.

C'est-à-dire que les trois élèves récompensés sont parmi les 4 garçons.

$$p(X=0) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

c) On a :

- $(X=1)$: une seule fille parmi le groupe des élèves récompensés.

Cela veut dire une fille et deux garçons sont récompensés.

$$p(X=1) = \frac{C_6^1 \times C_4^2}{120} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

- $(X=2)$: deux filles parmi le groupe des élèves récompensés.

Cela veut dire deux filles et un garçon sont récompensés.

$$p(X=2) = \frac{C_6^2 \times C_4^1}{120} = \frac{15 \times 4}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

- $(X=3)$: le groupe des élèves récompensés est formé de 3 filles.

Cela veut dire aussi qu'aucun garçon n'est récompensé.

$$p(X=3) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$d) E(X) = 0 \times \frac{1}{30} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{10} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3+10+5}{10} = \frac{18}{10} = 1.8.$$

Exercice 3

f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \text{Log}x$.

C la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \text{Log}x \right) = +\infty ; \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log}x = -\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, d'où la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale pour la courbe C.

$$2)a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \text{Log}x \right) = -\infty ; \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log}x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \text{Log}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\text{Log}x}{x} \right) = 0 ; \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}x}{x} = 0.$$

b) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ d'où la courbe C admet une branche parabolique de direction l'axe $(O, \vec{i})$.

3)a) $f(x) = \frac{1}{x} - \text{Log} x$; $x \in]0, +\infty[$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \text{Log} x\right)' = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} - \frac{x}{x^2} = -\frac{1+x}{x^2}$.

b) $f'(x) = -\frac{1+x}{x^2}$, $x \in]0, +\infty[$.

On a $1+x > 0$ et $x^2 > 0$, d'où $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

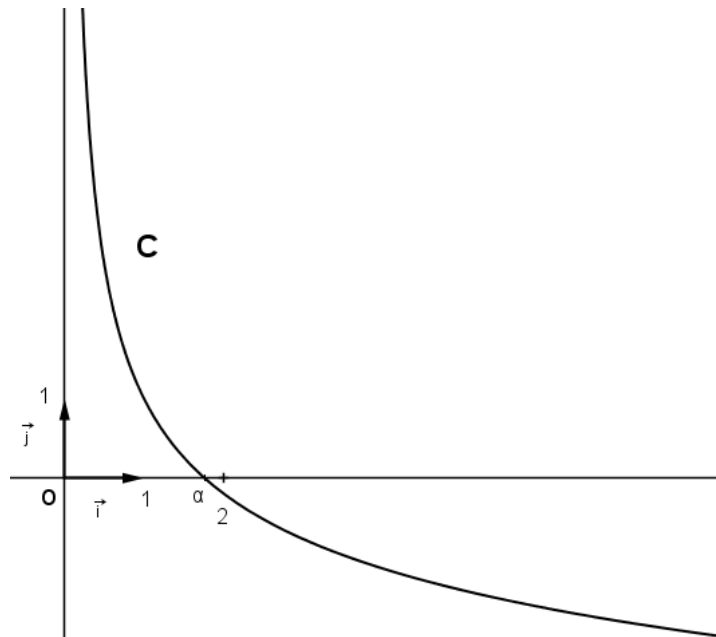
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
f	$+\infty$	$-\infty$



4)a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, d'où f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$. D'où il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

b) $f(1) = \frac{1}{1} - \text{Log} 1 = 1 - 0 = 1 > 0$; $f(2) = \frac{1}{2} - \text{Log} 2 < 0$ d'où $\alpha \in]1, 2[$.

5) La courbe C de f :



6)a) $F(x) = x + (1-x)\text{Log} x$; $x \in]0, +\infty[$.

On a F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$F'(x) = 1 - \text{Log} x + (1-x)\frac{1}{x} = 1 - \text{Log} x + \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x} - \text{Log} x = f(x).$$

D'où F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

b) On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

$$A = \int_1^{\alpha} f(x) dx = [F(x)]_1^{\alpha} = F(\alpha) - F(1) = F(x) = \alpha + (1 - \alpha) \operatorname{Log} \alpha - 1 \text{ unité d'aire.}$$

$$\text{c) On a : } f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - \operatorname{Log} \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Log} \alpha = \frac{1}{\alpha}.$$

$$A = \int_1^{\alpha} f(x) dx = \alpha + (1 - \alpha) \operatorname{Log} \alpha - 1 = \alpha + (1 - \alpha) \frac{1}{\alpha} - 1 = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}.$$