

Exercice n°1

1)

a) Soit $\bar{A}$: « obtenir aucune boule rouge » donc $p(\bar{A}) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$ d'où $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = \frac{19}{20}$

$$p(B) = \frac{C_2^2 \times C_4^1}{C_6^3} = \frac{1 \times 4}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

b) $A \cap B$: « obtenir une boule rouge et deux boules vertes »

$$p(A \cap B) = \frac{C_3^1 \times C_2^2}{C_6^3} = \frac{3 \times 1}{20} = \frac{3}{20}$$

$$c) p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{19}{20} + \frac{1}{5} - \frac{3}{20} = 1$$

2)

a)

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{4}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{4}{20}$

En effet :

$$p_0 = p(X = 0) = p(\text{aucune boule verte tirée}) = p(\text{obtenir 3 boules non vertes}) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20}$$

$$p_1 = p(X = 1) = p(\text{une boule verte tirée}) = \frac{C_2^1 \times C_4^2}{C_6^3} = \frac{2 \times 6}{20} = \frac{12}{20}$$

$$p_2 = p(X = 2) = p(\text{deux boules vertes tirées}) = p(B) = \frac{4}{20}$$

b) La moyenne des boules vertes tirées est $E(X) = 0 \times \frac{4}{20} + 1 \times \frac{12}{20} + 2 \times \frac{4}{20} = 1$

Exercice n°2

1)

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

b) $g(e) = \frac{1}{e}$ et $g'(e) = 0$

c)

x	0	e	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

$$2) \mathcal{A} = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} u. a$$

Exercice n°3

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \text{ donc } (O, \vec{j}): x = 0 \text{ est une asymptote verticale à } \mathbb{C}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0} e^X = e^0 = 1 \text{ donc } D: y = 1 \text{ est une asymptote horizontale à } \mathbb{C} \text{ au voisinage de } +\infty$$

2)

a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (composée de fonctions dérivables) et $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$

b)

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1

c) f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ alors f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$

3)

a) $u\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \approx 0,45$ et $u(2) = e^{\frac{1}{2}} - 2 \approx -0,35$

b) u est continue sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et $u\left(\frac{3}{2}\right) \times u(2) < 0$ alors l'équation $u(x) = 0$ c.a.d l'équation $e^{\frac{1}{x}} = x$ admet dans $\left]\frac{3}{2}, 2\right[$ au moins une solution α

c) $u'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - 1 < 0$ sur $]0, +\infty[$ donc α est la seule solution dans $]0, +\infty[$ de l'équation $e^{\frac{1}{x}} = x$

4)

a) $f(1) = e$ signifie $f^{-1}(e) = 1$

b) La courbe de f et celle de f^{-1} sont symétriques par rapport à $\Delta: y = x$

