

Correction : Exercice 1 (6 points)

1) **Vrai.**

La suite : $(\ln 2)^n$ est une suite géométrique de raison $q = \ln 2 \in]-1, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$.

2) **Faux.**

Pour tout entier naturel n , on a $U_{n+1} - U_n = -3 < 0$, ce qui prouve que la suite (U_n) est strictement décroissante. Par conséquent, pour tout n , $U_{n+1} < U_n$. En particulier pour $n = 2025$, on a $U_{2026} < U_{2025}$.

3) **Vrai.**

La fonction $h(x) = \ln(3x - 2)$ est définie sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$, et $h'(x) = \frac{3}{3x-2} > 0$. La fonction h est strictement croissante sur cet intervalle.

4) **Faux.**

$1 + \ln 2 = \ln(e) + \ln(2) = \ln(2e)$. Or, on sait que $e + 2 \neq 2e$ (puisque $e \neq 2$), $\ln(e + 2) \neq \ln(2e)$.

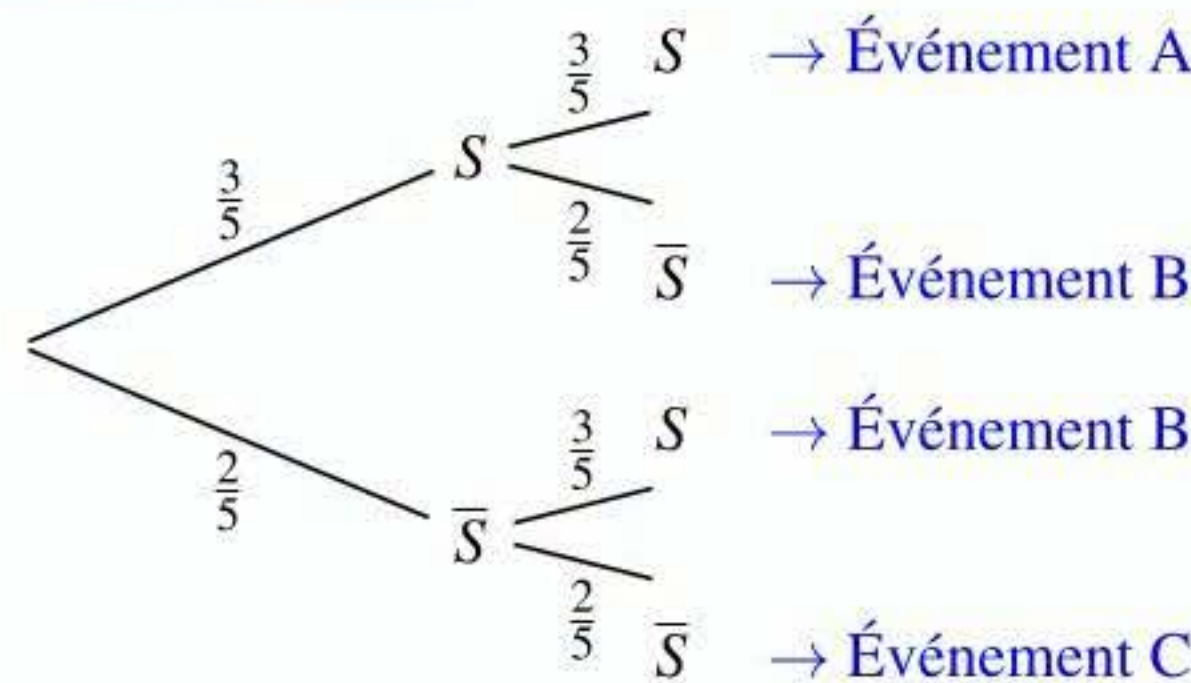
5) **Vrai.**

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, $-2x + 1 \rightarrow +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-2x + 1) = +\infty$.

6) **Vrai.**

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

Correction : Exercice 2 (7 points)



1) **a)** L'événement A correspond à atteindre la cible deux fois de suite, c'est-à-dire le chemin (S, S) .

$$p(A) = p(S \cap S) = p(S) \times p(S) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

b) L'événement B correspond à atteindre la cible une seule fois. $(S, \bar{S})$, ou $(\bar{S}, S)$.

$$p(B) = p(S \cap \bar{S}) + p(\bar{S} \cap S) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$$

c) L'événement C correspond à ne jamais atteindre la cible, c'est-à-dire le chemin $(\bar{S}, \bar{S})$.

$$p(C) = p(\bar{S}) \times p(\bar{S}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

L'événement D correspond à atteindre la cible au moins une fois. Donc $D = \bar{C}$.

$$p(D) = 1 - p(C) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

(Remarque : on pouvait aussi calculer $p(D) = p(A) + p(B) = \frac{9}{25} + \frac{12}{25} = \frac{21}{25}$).

2) La variable aléatoire X représente le gain algébrique du joueur.

- S'il n'atteint aucune fois la cible (Événement C) : il perd 6 dinars deux fois. Gain = $-6 - 6 = -12$.
- S'il atteint la cible une seule fois (Événement B) : il gagne 6 dinars et perd 6 dinars. Gain = $6 - 6 = 0$.
- S'il atteint la cible deux fois (Événement A) : il gagne 6 dinars deux fois. Gain = $6 + 6 = 12$.

Les valeurs prises par X sont donc : $X(\Omega) = \{-12, 0, 12\}$.

a) • $p(X = -12) = p(C) = \frac{4}{25}$ • $p(X = 0) = p(B) = \frac{12}{25}$ • $p(X = 12) = p(A) = \frac{9}{25}$

x_i	-12	0	12
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

b) $E(X) = (-12 \times \frac{4}{25}) + (0 \times \frac{12}{25}) + (12 \times \frac{9}{25}) = \frac{-48}{25} + 0 + \frac{108}{25} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5} = 2.4$

Le gain algébrique moyen de ce joueur est de **2.4 dinars** par partie. Le jeu est donc favorable au joueur ($E(X) > 0$).

Correction : Exercice 3 (7 points)

1) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = (-x+1)'e^{-x+1} = -1 \cdot e^{-x+1} = -e^{-x+1}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x+1} < 0$. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+1) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	0

c) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$.

2) a) • $f(0) = e^{-0+1} = e^1 = e$ • $f(1) = e^{-1+1} = e^0 = 1$ • $f(3) = e^{-3+1} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

b) On a :

- $f(0) = e \iff (0, e) \in \mathcal{C} \iff (e, 0) \in \mathcal{C}'$. Or $(e, 0)$ sont les coordonnées du point A. Donc $A \in \mathcal{C}'$.
- $f(1) = 1 \iff (1, 1) \in \mathcal{C} \iff (1, 1) \in \mathcal{C}'$. Or $(1, 1)$ sont les coordonnées du point B. Donc $B \in \mathcal{C}'$.
- $f(3) = \frac{1}{e^2} \iff (3, \frac{1}{e^2}) \in \mathcal{C} \iff (\frac{1}{e^2}, 3) \in \mathcal{C}'$. Or $(\frac{1}{e^2}, 3)$ sont les coordonnées du point C. Donc $C \in \mathcal{C}'$.

c) La courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1} s'obtient par symétrie axiale de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$. (Voir graphique).

- 3) $\mathcal{A}$ est l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses ($y = 0$), l'axe des ordonnées ($x = 0$) et la droite $x = 1$. La fonction f étant positive sur $[0, 1]$, l'aire $\mathcal{A}$ est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{-x+1} dx = [-e^{-x+1}]_0^1 = (-e^{-1+1}) - (-e^{-0+1}) = -e^0 - (-e^1) = -1 + e.$$

On a $\mathcal{A} = e - 1$ (en unités d'aire).

Annexe (Figure)

