

Corrigé sujet mathématiques section Sport session Contrôle 2019

Exercice 1

1) a)

$$u_1 = u_{0+1} = -20 + 1,2u_0 = -20 + 1,2 \times 300 = 340.$$

$$u_2 = u_{1+1} = -20 + 1,2u_1 = -20 + 1,2 \times 340 = 388.$$

2) a)

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 100 = -20 + 1,2u_n - 100 = 1,2(u_n - 100) = 1,2v_n.$$

la suite (v_n) est géométrique de raison $q=1,2$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 100 = 200$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n = 200 (1,2)^n$.

c)

$$n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 200 (1,2)^n \quad \text{et} \quad v_n = u_n - 100 \quad \text{donc} \quad u_n = v_n + 100$$

$$\text{donc } u_n = 200 (1,2)^n + 100$$

3) a)

$$u_n \geq 550 \quad \text{équivaut à} \quad 200 (1,2)^n + 100 \geq 550$$

$$\text{équivaut à} \quad 200 (1,2)^n \geq 450$$

$$\text{équivaut à} \quad (1,2)^n \geq 2,25$$

$$\text{équivaut à} \quad \ln((1,2)^n) \geq \ln(2,25)$$

$$\text{équivaut à} \quad n \ln((1,2)) \geq \ln(2,25)$$

$$\text{équivaut à} \quad n \geq \frac{\ln(2,25)}{\ln((1,2))} \approx 4,44$$

Donc le plus petit entier n tel que $u_n \geq 550$ est $n=5$.

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 200 (1,2)^n + 100 \quad \text{or} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 1,2^n = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 2

$$1) \text{ Card } E = A_{10}^3 = 720.$$

$$2) \text{ a) } p(A) = \frac{A_5^3}{720} = \frac{60}{720} = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad p(B) = \frac{A_5^3 + A_3^3}{720} = \frac{66}{720} = \frac{11}{120}$$

$$\text{b) } p(C) = 3 \frac{A_3^1 \times A_8^2}{720} = \frac{7}{15}.$$

3) a)

$$X \in \{0, 1, 2\}$$

$$p(X=0) = \frac{A_8^3}{720} = \frac{21}{45}.$$

$$p(X=1) = p(C) = \frac{21}{45}.$$

$$p(X=2) = 3 \cdot \frac{A_2^2 A_8^1}{720} = \frac{3}{45}.$$

$$b) E(X) = 0 \times \frac{21}{45} + 1 \times \frac{21}{45} + 2 \times \frac{3}{45} = 0,6$$

Exercice 3

$$1) a) f'(0) = \frac{-1-1}{-1-0} = -2$$

b) Une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est $T : f'(0) (x-0) + f(0)$.

Or $f'(0) = 2$ et $f(0) = 1$ d'où $T : y = 2x + 1$.

$$2) a) f'(x) = p e^{px} \text{ donc } f'(0) = p = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{2x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{2x} = 0.$$

3) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$.

$$4) a) \text{ soit } f^{-1}(e) = a \text{ donc } f(a) = e = e^{2a} \text{ donc } a = f^{-1}(e) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{De même } f^{-1}(1) = 0.$$

b) voir figure.

$$5) S = \int_{-1}^0 (e^{2x} - x) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{2e^2 - 1}{2e^2}.$$

