

Exercice n° 1

1) $p(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^4} = \frac{4}{120}.$

$p(B) = \frac{C_3^1 \times C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{63}{120}.$ (Sept jetons ne portent pas la lettre a).

$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - p(A) = \frac{116}{120}.$

2) a) L'urne contient 3 jetons qui portent la lettre a alors les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 3.

b) $p(X=0) = \frac{C_7^3}{120} = \frac{35}{120}, \quad p(X=1) = p(B) = \frac{63}{120},$

$p(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_7^1}{120} = \frac{21}{120}, \quad p(X=3) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}$

c) $E(x) = 0 \times p(X=0) + 1 \times p(X=1) + 2 \times p(X=2) + 3 \times p(X=3) = \frac{63}{120} + \frac{42}{120} + \frac{3}{120} = \frac{108}{120}.$

$V(X) = E(x^2) - (E(x))^2 = 0,49.$

Exercice n° 2

1) a) $U_1 = \frac{U_0}{2} + \frac{\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(2)}{4} = \frac{3}{4}\ln(2); \quad U_2 = \frac{U_1}{2} + \frac{\ln(2)}{4} = \frac{5}{8}\ln(2).$

b) $U_1 - U_0 = -\frac{1}{4}\ln(2)$ et $U_2 - U_1 = -\frac{1}{8}\ln(2)$ alors $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$. D'où U n'est pas arithmétique.

$\frac{U_1}{U_0} = \frac{3}{4}$ et $\frac{U_2}{U_1} = \frac{5}{6}$ alors $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$. D'où U n'est pas géométrique.

2) a) $V_0 = U_0 - \frac{1}{2}\ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2).$

b) $V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{U_n}{2} + \frac{\ln(2)}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{U_n}{2} - \frac{1}{4}\ln(2) = \frac{1}{2}\left(U_n - \frac{1}{2}\ln(2)\right) = \frac{1}{2}V_n.$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $V_n = V_0 \times q^n = \frac{1}{2}\ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

c) (V_n) est décroissante.

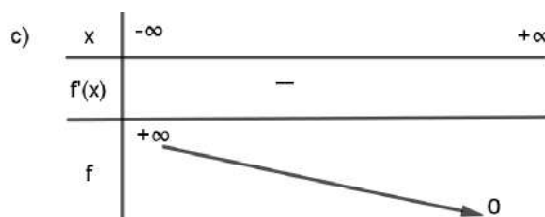
3) a) $U_n = V_n + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}.$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}\ln(2)$

Exercice n° 3

1) a) $f(1) = e; \quad f(2) = 1.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$



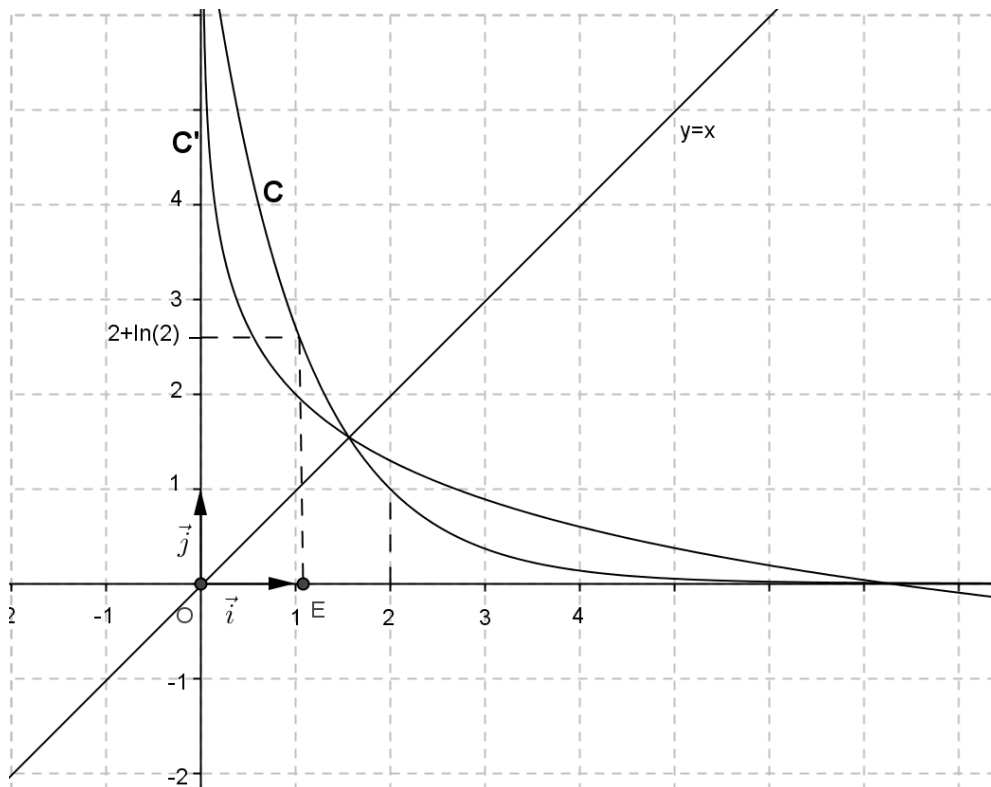
2)a) la fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors elle réalise une bijection

de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[=]0, +\infty[$.

b) f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$ et $2 + \ln(2) \in]0, +\infty[$ alors l'équation $f(x) = 2 + \ln 2$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α .

$f(1) = e^{2-1} = e^1 \neq 2 + \ln 2$ alors $\alpha \neq 1$.

3) a) b) et c) les courbes $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



4)a) Pour tout réel x , $F(x) = -e^{2-x}$ alors $F'(x) = -(-e^{2-x}) = e^{2-x} = f(x)$.

Alors F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f .

b) f est positive sur $[\alpha, 2]$ alors $A = \int_{\alpha}^2 f(x) dx = [-f(x)]_{\alpha}^2 = f(\alpha) - f(2) = f(\alpha) - f(2)$ (u.a).

c) $A = f(\alpha) - f(2) = 2 + \ln 2 - 1 = 1 + \ln 2$.