

Section : Sport

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

k un nombre réel.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5} u_n + k, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

I] Dans cette partie, on prend $k = \frac{2}{5}$.

$$1) u_1 = \frac{3}{5} u_0 + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \times 1 + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1 \quad ; \quad u_2 = \frac{3}{5} u_1 + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \times 1 + \frac{2}{5} = 1.$$

2) Montrons que $u_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons par récurrence :

- On a $u_0 = 1$, d'où l'égalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que l'égalité est vraie pour n , c'est-à-dire $u_n = 1$.
- Montrons que l'égalité est vraie pour $n + 1$.

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{3}{5} u_n + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \times 1 + \frac{2}{5} = 1.$$

$$\text{D'où } u_{n+1} = 1.$$

Ainsi d'après le principe de récurrence, $u_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II] Dans la suite de l'exercice, on prend $k = -\frac{3}{5}$.

$$1)a) u_1 = \frac{3}{5} u_0 - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times 1 - \frac{3}{5} = 0 \quad ; \quad u_2 = \frac{3}{5} u_1 - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times 0 - \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}.$$

b) Si (u_n) est une suite géométrique alors son rapport q va vérifier :

$$u_1 = q \times u_0 \Rightarrow 0 = q \quad \text{et} \quad u_2 = q \times u_1 \Rightarrow -\frac{3}{5} = 0 \quad \text{ce qui est absurde.}$$

D'où (u_n) n'est pas une suite géométrique.

2) (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2 u_n + 3$.

$$a) v_{n+1} = 2 u_{n+1} + 3 = 2 \left(\frac{3}{5} u_n - \frac{3}{5} \right) + 3 = \frac{6}{5} u_n - \frac{6}{5} + 3 = \frac{6}{5} u_n + \frac{9}{5} = \frac{3}{5} (2 u_n + 3) = \frac{3}{5} v_n$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = 2 u_0 + 3 = 5$.

$$b) v_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n \times v_0 = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$c) v_n = 2 u_n + 3 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2} (v_n - 3)$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2} \left(5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 3 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 3 \right) = -\frac{3}{2} ; \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0.$$

$$3)a) u_n - u_{n+1} = u_n - \frac{3}{5} u_n + \frac{3}{5} = \frac{2}{5} u_n + \frac{3}{5} = \frac{1}{5} (2 u_n + 3) = \frac{1}{5} v_n$$

$$b) u_n - u_{n+1} = \frac{1}{5} v_n ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La suite (v_n) est positive puisque son premier terme et sa raison sont positifs.

D'où $u_n - u_{n+1} \geq 0$; pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est-à-dire $u_n \geq u_{n+1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi la suite est décroissante.

$$c) \text{ On a } u_n = \frac{1}{2} \left(5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 3 \right) = \frac{5}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2} ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$4) S_{671} = v_0 + v_1 + \dots + v_{671} \text{ et } T_{671} = u_0 + u_1 + \dots + u_{671}$$

$$S_{671} - 2 T_{671} = (v_0 + v_1 + \dots + v_{671}) - 2(u_0 + u_1 + \dots + u_{671})$$

$$= (v_0 - 2 u_0) + (v_1 - 2 u_1) + \dots + (v_{671} - 2 u_{671}) ; \text{ or } v_n - 2 u_n = 3$$

$$= \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{672 \text{ fois}} = 3 \times 672 = 2016.$$

Exercice 2

En notant boxe BX, karaté K, judo J et natation N, on peut résumer les données comme suit :

$$10 \text{ élèves: } \begin{cases} 4 \text{ Filles : } 1\text{BX}, 1\text{K}, 2\text{N} \\ 6 \text{ Garçons : } 3\text{BX}, 2\text{J}, 1\text{N} \end{cases}$$

$$1) \text{ On choisit au hasard 2 élèves parmi les 10 médaillés. } \text{Card} \Omega = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

$$A : \ll \text{ Les deux élèves choisis pratiquent la natation } \gg. p(A) = \frac{C_3^2}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}.$$

$$B : \ll \text{ Parmi les deux élèves choisis, un seul pratique le judo } \gg. p(B) = \frac{C_2^1 \times C_8^1}{45} = \frac{2 \times 8}{45} = \frac{16}{45}.$$

2) Une association choisit au hasard 3 élèves parmi les 10 médaillés.

$$\text{Card} \Omega = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120.$$

a) E : « Les trois champions choisis sont de même sexe ».

$$p(E) = \frac{C_4^3 + C_6^3}{120} = \frac{4 + 20}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

F : « Les trois champions choisis pratiquent la même activité sportive ». Donc ils pratiquent la boxe ou la natation. $p(F) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{120} = \frac{4 + 1}{120} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}.$

G : « au moins un champion parmi les trois choisis pratique le judo ».

$$p(G) = \frac{C_2^1 \times C_8^2 + C_2^2 \times C_8^1}{120} = \frac{2 \times 28 + 1 \times 8}{120} = \frac{64}{120} = \frac{8}{15}.$$

b) $E \cap F$: « Les trois champions choisis sont de même sexe et pratiquent la même activité sportive ». C'est-à-dire ce sont les 3 garçons qui pratiquent la boxe. $p(E \cap F) = \frac{1}{120}.$

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F) = \frac{1}{5} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} = \frac{28}{120} = \frac{7}{30}.$$

c) X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de médaillés en boxe.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$$

(X = 0) : « Aucun médaillé en boxe parmi les trois champions récompensés ».

$$p(X = 0) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

(X = 1) : « Un seul médaillé en boxe parmi les trois champions récompensés ».

$$p(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{120} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2}.$$

(X = 2) : « Deux médaillés en boxe parmi les trois champions récompensés ».

$$p(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_6^1}{120} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{3}{10}.$$

(X = 3) : « Les trois champions récompensés sont médaillés en boxe ».

$$p(X = 3) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

On peut résumer la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	0	1	2	3
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{12}{10} = 1,2.$$

Exercice 3

1) Par lecture graphique :

a) $f(0) = \frac{1}{e}$; $f(1) = 1$; $f(1+\ln 2) = 2$ et $f'(1) = 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c) L'ensemble des réels x tels que $\frac{1}{e} \leq f(x) < 2$ est $[0, 1+\ln 2[$.

2)a) $f(x) = e^{\alpha x + \beta}$; α et β deux réels.

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{e} \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\beta} = \frac{1}{e} \\ e^{\alpha + \beta} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \ln \frac{1}{e} = -1 \\ \alpha - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$f(x) = e^{x-1}$; pour tout réel x .

b) $f(x) = e^{x-1}$; pour tout réel x .

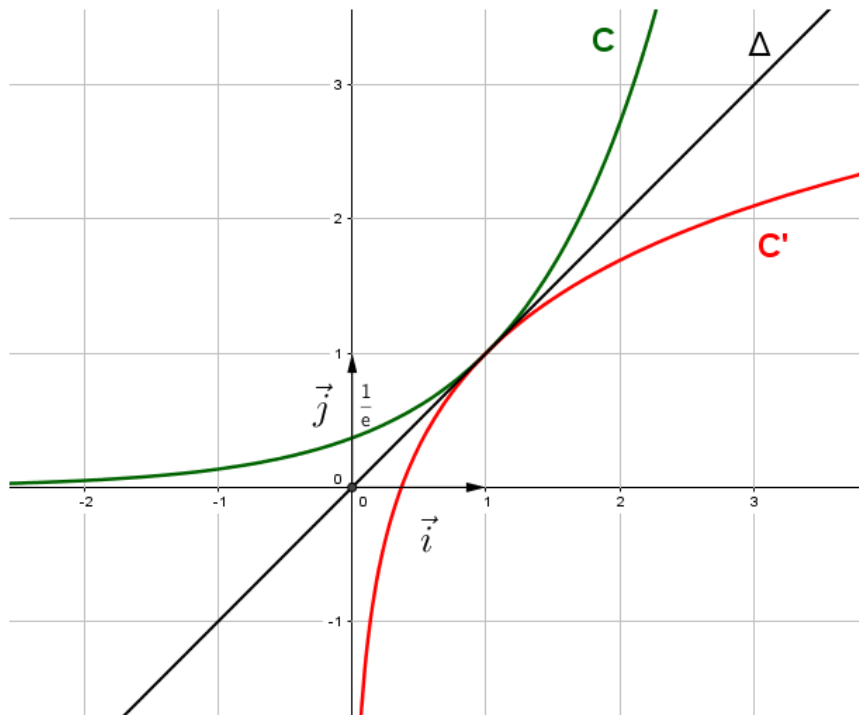
$f'(x) = (x-1)' e^{x-1} = e^{x-1}$; pour tout réel x .

3)a) $f'(x) = e^{x-1} > 0$; pour tout réel x . D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

b) On a $f(0) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow f^{-1}(\frac{1}{e}) = 0$; $f(1) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 1$; $f(1+\ln 2) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 1+\ln 2$.

c) La courbe C' de f^{-1} :



4)a) On note A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, la tangente Δ et la droite d'équation $x = 0$.

$$A = \int_0^1 (f(x) - x) dx = \int_0^1 (e^{x-1} - x) dx = \left[e^{x-1} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

b) On note A' l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C' et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 0$.

On peut remarquer, par raison de symétrie par rapport à Δ , que $A + A'$ est l'aire du triangle limité par Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 0$. L'aire de ce triangle est la moitié de l'aire du carré, donc l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}$ u.a.

$$\begin{aligned} \text{On a } A + A' &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow A' = \frac{1}{2} - A \\ &\Leftrightarrow A' = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e} \text{ u.a} \end{aligned}$$