

Section : Sport

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

(V_n) la suite géométrique de premier terme $V_0 = \frac{1}{6}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

1)a) $V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$; car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = -\frac{23}{6} \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n - 3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > -4$.

- $U_0 = -\frac{23}{6} > -4$, d'où l'inégalité est vérifiée pour 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons l'inégalité est vraie pour n , c'est-à-dire $U_n > -4$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned} U_n > -4 &\Rightarrow \frac{1}{4}U_n > -1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{4}U_n - 3 > -4 \\ &\Rightarrow U_{n+1} > -4. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > -4$.

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}U_n - 3 - U_n = -\frac{3}{4}U_n - 3 = -\frac{3}{4}(U_n + 4)$.

c) $U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{4}(U_n + 4)$

Or $U_n > -4$, d'où $U_n + 4 > 0$ et $-\frac{3}{4}(U_n + 4) < 0$. Donc $U_{n+1} - U_n < 0$.

Par conséquent la suite (U_n) est décroissante.

On a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > -4$. Cela veut dire que la suite est minorée par (-4) .

La suite est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

3)a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n = 4$.

- $V_0 - U_0 = \frac{1}{6} - \left(-\frac{23}{6}\right) = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = \frac{24}{6} = 4$, d'où l'égalité est vérifiée pour 0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons l'égalité est vraie pour n , c'est-à-dire $V_n - U_n = 4$.

- Montrons que l'égalité est vraie pour $n+1$.

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{4}V_n - \left(\frac{1}{4}U_n - 3\right) = \frac{1}{4}(V_n - U_n) + 3 = \frac{1}{4} \times 4 + 3 = 4.$$

D'où l'égalité est vraie pour $n+1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n = 4$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n = 4$.

$$V_n - U_n = 4 \Leftrightarrow U_n = V_n - 4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n - 4 = -4 ; \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0.$$

Exercice 2

Une urne contient : 9 jetons $\begin{cases} 4 \text{ blancs : } 1; 2; 3; 4 \\ 3 \text{ noirs : } 1; 2; 3 \\ 2 \text{ rouges : } 1; 2 \end{cases}$

Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.

1) Le nombre de tirages possibles est $C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$.

a) A : « Les trois jetons tirés sont de même couleur ». C'est-à-dire on a tiré trois jetons blancs ou trois jetons noirs, puisqu'il y a que deux jetons rouges.

$$p(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{84} = \frac{4+1}{84} = \frac{5}{84}.$$

B : « Les trois jetons tirés portent le même numéro ». C'est-à-dire on a tiré trois jetons portant le numéro 1 ou trois jetons portant le numéro 2, puisqu'il y a que deux jetons qui portent le numéro 3 et un seul jeton qui porte le numéro 4.

$$p(B) = \frac{C_3^3 + C_3^3}{84} = \frac{1+1}{84} = \frac{2}{84}.$$

b) Pour montrer que les événements A et B sont incompatibles (c'est-à-dire ils ne peuvent pas se réaliser à la fois), on détermine l'évènement $A \cap B$.

$A \cap B$: « Les trois jetons tirés sont de même couleur et portent le même numéro ».

On n'a pas trois jetons de même couleur et qui portent le même numéro, donc l'évènement $A \cap B$ est impossible. D'où les évènements A et B sont incompatibles.

Par conséquent $p(A \cap B) = 0$.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{5}{84} + \frac{2}{84} - 0 = \frac{7}{84}$$

c) C : « Le tirage est tricolore ». C'est-à-dire on a tiré trois couleurs différentes. Autrement dit on a tiré un jeton blanc, un jeton noir et un jeton rouge.

$$p(C) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{84} = \frac{4 \times 3 \times 2}{84} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}.$$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois jetons, associe le nombre de jetons portant un numéro pair.

On peut répartir les 9 jetons comme suit : 9 jetons $\begin{cases} 4 \text{ pairs : } 2 ; 2 ; 2 ; 4 \\ 5 \text{ impairs : } 1 ; 1 ; 1 ; 3 ; 3 \end{cases}$

a) Les valeurs possibles prises par X : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

On a :

- (X = 0) : Aucun jeton pair n'est tiré.
Cela veut dire que les trois jetons tirés portent des numéros impairs.

$$p(X = 0) = \frac{C_5^3}{84} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}.$$

- (X = 1) : Un jeton pair et les deux autres sont impairs.

$$p(X = 1) = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{84} = \frac{4 \times 10}{84} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}.$$

- (X = 2) : deux jetons pairs et le troisième jeton est impair.

$$p(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_5^1}{84} = \frac{6 \times 5}{84} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}.$$

- (X = 3) : les trois jetons tirés portent des numéros pairs.

$$p(X = 3) = \frac{C_4^3}{84} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}.$$

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$$b) E(X) = 0 \times \frac{5}{42} + 1 \times \frac{10}{21} + 2 \times \frac{5}{14} + 3 \times \frac{1}{21} = \frac{10}{21} + \frac{5}{7} + \frac{3}{21} = \frac{10}{21} + \frac{15}{21} + \frac{3}{21} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}.$$

Exercice 3

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x e^{-x}$.

C la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$1)a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} = 0 ; \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, d'où C admet une asymptote horizontale d'équation $x = 0$.

$$2)a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x e^{-x} = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 e^{-x} = +\infty.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

D'où la courbe C de f admet une branche parabolique de direction l'axe $(O, \vec{j})$.

$$3)a) f(x) = 2x e^{-x} ; x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 2e^{-x} - 2x e^{-x} = 2(1-x)e^{-x} ; x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} b) f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2(1-x)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1-x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

c) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

$$\begin{aligned} 4)a) f(x) = x &\Leftrightarrow 2x e^{-x} = x \\ &\Leftrightarrow 2x e^{-x} - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(2e^{-x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2e^{-x} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } e^{-x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x = \text{Log}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x = -\text{Log}2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \text{Log}2$$

b) Soit Δ la droite d'équation $y = x$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \Delta \cap C &\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ y = x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \text{Log}2 \\ y = x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow M(0,0) \text{ ou } M(\text{Log}2, \text{Log}2) \end{aligned}$$

D'où la courbe C coupe la droite Δ en deux points $M_1(0,0)$ et $M_2(\text{Log}2, \text{Log}2)$.

5) Voir figure.

$$6)a) \int_0^{\text{Log}2} x e^{-x} dx.$$

$$\text{On pose } u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\text{Log}2} x e^{-x} dx &= \left[-x e^{-x} \right]_0^{\text{Log}2} - \int_0^{\text{Log}2} -e^{-x} dx \\ &= \left[-x e^{-x} \right]_0^{\text{Log}2} - \left[e^{-x} \right]_0^{\text{Log}2} \\ &= -\text{Log}2 e^{-\text{Log}2} - \left[e^{-\text{Log}2} - 1 \right] \\ &= -\text{Log}2 e^{\text{Log}\frac{1}{2}} - \left(e^{\text{Log}\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2}\text{Log}2 - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \text{Log}2) \end{aligned}$$

b) A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C , la droite et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \text{Log}2$.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\text{Log}2} (f(x) - x) dx = \int_0^{\text{Log}2} (x e^{-x} - x) dx \\
 &= \int_0^{\text{Log}2} x e^{-x} dx - \int_0^{\text{Log}2} x dx \\
 &= \frac{1}{2}(1 - \text{Log}2) - \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\text{Log}2} \\
 &= \frac{1}{2}(1 - \text{Log}2) - \frac{1}{2}\text{Log}^2 2 \\
 &= \frac{1}{2}(1 - \text{Log}2 - \text{Log}^2 2) \text{ unité d'aire.}
 \end{aligned}$$

