

REPUBLIQUE TUNISIENNE  
MINISTRE DE L'EDUCATION  
**EXAMEN DU BACCALAUREAT**  
**SESSION DE JUIN 2011**

**SESSION  
PRINCIPALE**

**SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES**  
**EPREUVE : MATHÉMATIQUES**

**DURÉE : 3h**

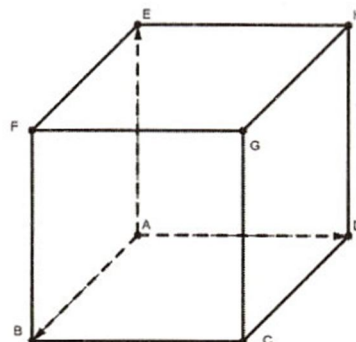
**COEFFICIENT : 3**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3  
La page 3/3 est à rendre avec la copie

**Exercice 1 (4 points)**

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.  
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.  
Aucune justification n'est demandée.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.  
On munit l'espace du repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .



- 1) Le vecteur  $\overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC}$  est égal à  
a)  $\overrightarrow{BG}$       b)  $\overrightarrow{BD}$       c)  $\overrightarrow{BA}$ .
- 2) L'intersection des plans d'équations  $x = 1$  et  $y = 1$  est la droite  
a) (CH)      b) (CF)      c) (CG).
- 3) Une équation du plan (ACE) est  
a)  $x + y = 0$       b)  $x - y = 0$       c)  $x - y = 1$ .
- 4) L'intersection de la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  avec le plan d'équation  $z = 1$  est  
a) un cercle      b) un point      c) l'ensemble vide.

**Exercice 2 (5 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A et B d'affixes respectives  $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ .

- 1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.  
b) Vérifier que  $b^2 = a$ .

- 2) Soit C le point d'affixe  $c = a + b$ .  
a) Placer les points A, B et C.  
b) Vérifier que  $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

- 3) On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 + z - c = 0$ .  
a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).  
b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).

Montrer que  $d = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$

- c) Placer alors, le point D d'affixe d.

### Exercice 3 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 3/3), on a représenté dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $C$  de la fonction logarithme népérien («ln »).

1) Placer les points de la courbe  $C$  d'abscisses  $e$  et  $\sqrt{e}$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln^2 x - \ln x + 1$ .

On note  $C_f$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x}$ .

d) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Etudier la position relative des courbes  $C_f$  et  $C$ .

b) Tracer  $C_f$  dans l'annexe ci-jointe.

4) Soit  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par les courbes  $C$  et  $C_f$  et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=e$ .

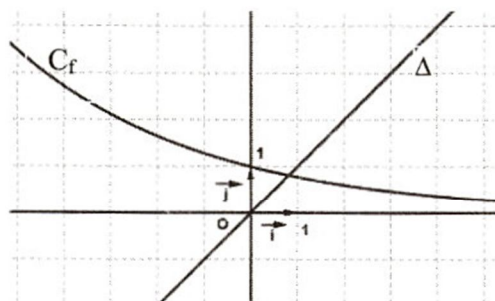
a) Montrer que  $\int_1^e \ln^2 x \, dx = e - 2$ .

b) Calculer  $A$ .

### Exercice 4 (5 points)

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe  $C_f$  de la fonction

$f: x \mapsto e^{-\frac{x}{4}}$  ainsi que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .



1) a) Utiliser le graphique pour justifier que l'équation

$e^{-\frac{x}{4}} = x$  admet dans  $[0, 1]$  une solution unique  $\alpha$ .

b) Vérifier que  $0.8 < \alpha < 0.9$ .

2) Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) ; n \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq U_n \leq 1$ .

b) Montrer que pour tout réel  $x \in [0, 1]$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .

c) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$ .

d) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

e) Montrer que la suite  $(U_n)$  est convergente vers  $\alpha$ .

3) a) Déterminer un entier naturel  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $|U_n - \alpha| < 10^{-3}$ .

b) En déduire une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

